Федеральное агентство по образованию

Национальный исследовательский
ядерный университет «МИФИ»

Л.П. Постникова, Е.В. Сумин

Теория вероятностей и математическая статистика

Курс лекций

(часть 1)

Учебное пособие

Москва 2010

УДК 519.2(07)
ББК 22.17я7
П63

Постникова Л.П., Сумин Е.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Курс лекций (часть 1): *учеб. пособие*. – В 2-х ч. – М.: НИЯУ МИФИ, 2010. – 84 с.

Учебное пособие (в двух частях) написано на основе полугодового курса лекций, читаемого на протяжении ряда лет в НИЯУ МИФИ. В пособии изложены основные разделы теории вероятностей и математической статистики.

В первой части пособия рассмотрены исходные понятия теории вероятностей, классическое определение вероятности, аксиоматическое построение теории вероятностей, последовательность независимых испытаний и цепи Маркова.

Во второй части будут приведены случайные величины, их характеристики, закон больших чисел, предельные теоремы, элементы математической статистики и метод Монте-Карло. В приложении приведены необходимые таблицы.

Пособие дополняют ранее изданные методические рекомендации [1-4], посвященные решению задач по курсу теории вероятностей и математической статистики на практических занятиях в НИЯУ МИФИ.

Предназначено для студентов физико-математических специальностей, изучающих курс теории вероятностей и математической статистики в течение одного семестра. Также будет полезно аспирантам и преподавателям при чтении лекций и проведении практических занятий.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. А.Н. Велигура

Рекомендовано редсоветом НИЯУ МИФИ
в качестве учебного пособия

ISBN 978-5-7262-1347-7

ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятностей – математическая наука о случайных явлениях и их закономерностях. Под случайными понимаются явления с неопределенным исходом, происходящие при неоднократном воспроизведении определенного набора условий. Теория вероятностей изучает специфические закономерности и различные свойства случайных явлений на основе математических вероятностных моделей.

Математическая статистика – математическая наука, изучающая методы сбора, систематизации, обработки и интерпретации результатов наблюдений с целью выявления статистических закономерностей. Задачи, относящиеся к сфере «компетенции» математической статистики, являются по своей сути обратными к задачам теории вероятностей. Если при постановке вероятностных задач задаются такие характеристики случайных величин, как функции распределения, плотность распределения, математическое ожидание, дисперсия и т.д., то в задачах математической статистики, напротив, по результатам, как правило, независимых экспериментов (выборок), связанных со случайной величиной, возникают задачи восстановления неизвестного закона распределения (или его отдельных характеристик).

Цель учебного пособия – изложение основ теории вероятностей и элементов математической статистики. При написании пособия были использованы известные учебники и монографии [5-10]. Данное пособие вместе с ранее опубликованными методическими рекомендациями [1-4] представляют собой единый курс по теории вероятностей и математической статистике (теория и практическое решение задач).

Глава 1

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

---

§ 1. События

В теории вероятностей идет речь о вероятности событий. Таким образом, первый термин, с которым встречаются в теории вероятностей, – термин «событие».

Математическое мышление – формальное. Значит, первая задача состоит в анализе термина «событие».

Прежде всего, отвлекаемся от субъективного и эмоционального оттенка этого слова. В обычном словоупотреблении свадьба – действительно событие, а царапина – пустяк. Событием будем называть всякое явление, о котором имеет смысл говорить, происходит оно или не происходит.

Однако такая формулировка содержит неясность. Непонятно, есть ли явления, о которых не имеем смысла говорить: происходят они или не происходят. Не лучше ли просто сказать «событие – всякое явление». Таким образом, термин «событие» сводится к термину «явление». Но тогда следует определить термин «явление». Слово «явление» в естественных науках считается не требующим объяснения, но в математике слово «явление» не употребляется. Толкование события как явления, безусловно, имеет ориентирующее значение при приложениях теории вероятностей к естественным и социальным проблемам, однако при построении математической теории следует пойти по другому пути.

Будем трактовать термин «событие» как множество обстоятельств, т.е. некоторых более частных событий.

Таким образом, необходимо определить понятие «события» в рамках теории множеств.

При рассмотрении какой-либо задачи теории вероятностей все события будем рассматривать как варианты осуществления некоторого генерального события, которое будем называть пространством элементарных событий, или выборочным пространством. Пространство элементарных событий будем обозначать символом Ω.

Приведем примеры.

А. Пусть бросается монета. Пространство Ω состоит из двух элементов. Один элемент – сторона монеты, на которой изображен герб, другой элемент – сторона монеты, на которой выбито достоинство монеты, жаргонное название «решка»:

$$\Omega=\{\text{герб},\ \text{решка}\}.$$

Б. Бросание шестигранной кости. Пространство Ω состоит из шести элементов:

$$\Omega=\left\{\text{⚀},\ \text{⚁},\ \text{⚂},\ \text{⚃},\ \text{⚄},\ \text{⚅}\right\}.$$

В. Рулетка. Рассмотрим круг, обвод которого (окружность) имеет длину равную 1 (рис. 1). От некоторой выбранной точки на окружности, которую обозначим числом 0, будем отсчитывать в направлении, противоположном часовой стрелке, расстояния. Каждый точке окружности однозначно сопоставляется вещественное число α, $0\le\alpha\le1$. Только для одной точки окружности нарушится однозначность, именно точки $\alpha=0$ и $\alpha=1$ совпадают. В центр круга поместим легкую и тонкую стрелку, свободно вращающуюся на оси. Сообщим стрелке сильный импульс. Сделав какое-то количество оборотов, стрелка остановится против какой-то точки круга α.

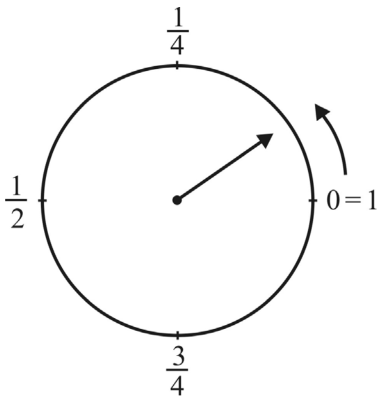

Рис. 1

Пространство Ω состоит из точек окружности длины 1. В отличие от первых двух примеров множество Ω является бесконечным.

Г. Пусть на прямой нанесена равномерная шкала с шагом в 1 см (или какая-либо другая единица длины). В какую-либо точку шкалы помещен кузнечик, и он последовательно прыгает либо на одно деление вправо, либо на одно деление влево. Каждый прыжок кузнечика фиксируем в протоколе: если он прыгнул вправо, записываем +1; если влево, то −1. Предположим далее, что кузнечик прыгает вечно. Пространством элементарных событий Ω является бесконечная последовательность

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, ...),$$

где каждое ε_i равно либо +1, либо −1.

Элементы множества Ω называются элементарными событиями, или элементарными исходами, или просто исходами. Элементарные события будем обозначать символом ω.

Можем придать более точное звучание мысли «событие – совокупность обстоятельств», введя важнейшее определение.

Определение 1.1. Событием называется любое подмножество опыта Ω или некоторое множество элементарных событий.

Например, рассмотрим бросание шестигранной кости. Здесь событием может быть выпадение трех очков, выпадение четного числа очков и т.д.

Пусть кузнечик прыгает по линейной шкале. Событием может быть возвращение кузнечика на втором шаге в исходную точку: этому событию соответствуют протоколы:

$$(+1, -1, \text{любое продолжение}),$$

$$(-1, +1, \text{любое продолжение}).$$

Среди событий будем рассматривать так называемое невозможное – событие, состоящее из пустого множества элементарных исходов. Например, в опыте с бросанием монеты невозможным событием является одновременное выпадение обеих ее сторон. В опыте с движением кузнечика невозможным событием является возвращение в исходную точку на третьем шаге.

Невозможное событие, как и пустое множество, будем обозначать через перечеркнутый нуль (∅).

Заметим, что и опыт Ω является событием (его называют достоверным): опыт Ω – множество всех элементарных событий. Например, при бросании шестигранной кости достоверным событием Ω является выпадение любой грани.

Говорят, что подмножество A основного множества Ω содержится (или включается) в подмножестве B, если всякий элемент A является элементом B, что записывают в виде

$$A \subset B .$$

Применительно к событиям отношение включения формулируется следующим образом: рассматривают два события A и B, связанные с опытом Ω. Говорят, что событие A влечет событие B, если из наступления A следует, что осуществилось и событие B. Обозначением этой связи событий является запись

$$A \subset B .$$

Если ω есть элементарное событие, то отношение ω «влечет» событие B записывают с помощью специфического знака

$$\omega \in B .$$

Пример 1.1. Пусть Ω – опыт с бросанием шестигранной кости, событие ω – выпадение двух очков, событие B – количество выпавших очков – четное. Ясно, что всякий раз, когда осуществилось событие ω, осуществилось и событие B.

Если элементарный исход ω не влечет события B, то будем писать:

$$\omega \notin B .$$

Отношение «влечет за собой» обладает следующими очевидными свойствами.

1. $A \subset A$.

2. Если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.

Предположим, что из наступления A следует, что наступило событие B и из наступления B следует наступление события A. В таком случае говорят, что события A и B равносильны, что обозначают символом:

$$A = B .$$

Пример 1.2. Событие A означает, что боксер, участвующий в состязании, получит удар в лоб, а событие B состоит в том, что он получит удар по лбу. Поскольку все равно «что в лоб, что по лбу», то $A = B$.

Пример – шуточный, но в рассуждениях теории вероятностей переформулировка содержания события бывает зачастую полезна.

§ 2. Алгебра событий

В теории множеств для подмножества основного множества Ω определяются операции.

А. Операция сложения (или объединения). Объединением $A\bigcup B$ двух подмножеств A и B множества Ω назовем множество, составленное из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B.

Б. Операция произведения (или пересечения). Пересечением $A\bigcap B$ (будем также употреблять символ AB) двух подмножеств A и B множества Ω назовем множество, состоящее из элементов, содержащихся как в A, так и в B.

Если $A\bigcap B \doteq \varnothing$, то множества называются не пересекающимися.

В. Операция дополнения. Пусть A – подмножество Ω, дополнением A называется множество, составленное из элементов Ω, не принадлежащих A. Дополнение A обозначается через $\overline{A}$.

Очевидно,

$$A\bigcup \overline{A} = \Omega .$$

Заметим, что в математике рассматривают суммы и произведения не только двух, но даже бесконечного количества множеств.

Приведем свойства операций $\bigcup$, $\bigcap$ и –.

Коммутативность:

$$A\bigcap B = B\bigcap A; \quad A\bigcup B = B\bigcup A .$$

Ассоциативность:

$$(A\bigcap B)\bigcap C = A\bigcap (B\bigcap C);$$

$$(A\bigcup B)\bigcup C = A\bigcup (B\bigcup C).$$

Идемпотентность:

$$A\bigcap A = A; \quad A\bigcup A = A .$$

Дистрибутивность:

$$A\bigcap (B\bigcup C) = (A\bigcap B)\bigcup (A\bigcap C);$$

$$A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C).$$

Свойство де Моргана:

$$A\bigcap\varnothing=\varnothing,\quad A\bigcup\Omega=\Omega;$$

$$A\bigcup\varnothing=A,\quad A\bigcap\Omega=A.$$

Инволюция:

$$\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B},\quad \overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B},$$

$$\overline{(\overline{A})}=A.$$

Наконец, разностью множеств $A\setminus B$ называется множество элементов, входящих в A и не входящих в B:

$$A\setminus B=A\bigcap\overline{B}.$$

В применении к событиям употребляется специфическая терминология.

Введем операции над событиями, связанными с каким-либо опытом.

А. Суммой (или объединением) $A\bigcup B$ двух событий A и B назовем событие, равносильное наступлению хотя бы одного из событий A или B.

Обратимся снова к традиционному в теории вероятностей опыту, связанному с бросанием игральной кости: обозначим через A – выпадение при этом бросании трех очков, а через B – выпадение шести очков. Событие $A\bigcup B$ есть выпадение числа очков, кратного трем.

Б. Произведением (или пересечением) $A\bigcap B$ (будем также употреблять символ AB) двух событий A и B назовем событие, равносильное наступлению обоих событий A и B.

Это может означать одновременное наступление событий A и B. Но слово «одновременное» может неправильно ориентировать. К примеру, пусть опыт Ω состоит в двух последовательных бросаниях игральной кости, пусть A – событие, состоящее в том, что при первом бросании выпадет шестерка. Событие AB означает выпадение шестерки в первом бросании и шестерки при втором бросании, никакой «одновременности» здесь не предполагается.

Если AB есть невозможное событие, то

$$AB=\varnothing,$$

тогда говорят, что события A и B – несовместные (или непересекающиеся). Пример: опыт Ω – бросание монеты, A – выпадение герба, B – выпадение решки. События A и B несовместны.

В. Условимся обозначать символом $\overline{A}$ событие, равносильное ненаступлению события A. Так, если обратиться к примеру с двукратным бросанием игральной кости и обозначить через A событие, состоящее в том, что при первом бросании выпадет шестерка, то $\overline{A}$ будет обозначать событие, равносильное тому, что при первом бросании выпало меньше шести очков. Событие $\overline{A}$ называется противоположным или дополнительным к событию A.

Заметим, что приведенные выше свойства этих операций остаются в силе, когда фигурирующие в свойствах буквы A, B, C суть события, связанные с некоторым опытом Ω.

Разностью событий $A \setminus B$ называется событие, равносильное наступлению события A и ненаступлению события B. Так, если Ω – опыт с двукратным бросанием кости, A – событие, состоящее в том, что сумма выпавших очков на обоих костях равна семи, а B – событие, состоящее в том, что количество очков при втором бросании будет четно, то событие $A \setminus B$ есть набор таких вариантов:

$$\left\{\begin{matrix} \text{первое бросание} & 2 & \text{второе бросание} & 5 \\ -''- & 4 & -''- & 3 \\ -''- & 6 & -''- & 1 \end{matrix}\right\}.$$

Пусть даны события A и B. Составим их произведение AB и сумму $A \bigcup B$. Будем различать две ситуации:

1) когда произведение AB есть возможное событие;

2) когда произведение AB есть невозможное событие – $AB = \varnothing$, т.е. события A и B несовместны.

Во второй ситуации сумма $A \bigcup B$ состоит из наступления либо только события A, либо только события B, но не их обоих, поскольку это последнее невозможно. Имея дело со второй ситуацией, будем говорить, что события $A \bigcup B$ подразделяются на частные случаи A и B.

Предположим, что в комнату залетела оса, будем следить за ее полетом. Выделим мысленно в комнате две области U_1 и U_2 и обозначим через U область, образованную объединением областей

U_1 и U_2. Обозначим через A и B события, заключающиеся в попадании, соответственно, в области U_1 и U_2. Тогда попадание осы в область U есть событие $A \bigcup B$, а событие $A \bigcap B$ – попадание осы в общую часть областей U_1 и U_2. Если области U_1 и U_2 перекрываются, то событие AB возможно, и возникает первая ситуация. Если области U_1 и U_2 друг с другом не перекрываются, то событие AB, очевидно, невозможно, т.е. события A и B несовместны. В этой ситуации событие $A \bigcup B$ состоит в попадании осы либо в область U_1, но не область U_2, либо в область U_2, но не в U_1. Попадание осы в область U подразделяется на частные случаи: попадание осы в область U_1 и попадание ее в область U_2.

Вообще, если дан некоторый конечный или бесконечный набор событий $\{A_i\}$, причем каждое из них несовместно с каждым другим, то будем говорить, что события $\bigcup\limits_i A_i$ подразделяются на частные случаи A_i.

И, наконец, введем еще одно определение.

Будем говорить, что имеется полная группа событий $\{A_i\}$ (связанных с опытом Ω), если хотя бы одно из этих событий наступает, т.е. $\Omega = \bigcup A_i$.

Например, при бросании кости имеем следующую группу событий:

$$\{A_i\},\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

где A_i – событие, состоящее в том, что выпадет i очков.

§ 3. Частота событий

До сих пор изложение не выходило за пределы теории множеств, изложенной на языке событий. В теории вероятностей рассматривают события вместе с количественной характеристикой их «значимости». Под «значимостью» события понимается здесь частота появления этого события в многократной серии однотипных (т.е. производящихся в одинаковых условиях) опытов. Именно так понимаемая «значимость» события является интуитивной основой понятия вероятности события.

Остановимся на этом подробнее.

Пусть производится n опытов при одинаковых обстоятельствах. И пусть результатом каждого отдельного опыта будет наступление или ненаступление некоторого события A. Предположим, что в n опытах событие A наступает m раз (или не наступает $(n-m)$ раз). Отношение $\frac{m}{n}$ называется частотой (или относительной частотой) наступления события A.

Приведем примеры.

Пример 3.1. Бросание симметричной монеты. Событие A означает выпадение герба. Пусть m – число выпадений герба в n опытах, так что m/n – частота выпадения герба. В табл. 1 помещены результаты [11], экспериментально полученные разными исследователями, начиная с XVIII в.

Таблица 1

Исследователь	n	m/n
Бюффон	4040	0,507
Де Морган	4092	0,5005
Джеванс	20480	0,5068
Романовский	80640	0,4923
Пирсон К.	24000	0,5005
Феллер	10000	0,4979

Данные опыты в совокупности показывают, что предположение о равновозможности герба и решки, т.е. о том, что с вероятностью 0,5 появляется любая сторона монеты, находится в согласии с опытом.

Пример 3.2. Статистика рождаемости. Событие A означает рождение мальчика. Пусть n – общее число рождений (мальчиков и девочек), так что m/n – частота рождения мальчиков. Приведем данные [11] о рождаемости в Швеции за 1935 г. в табл. 2.

Таблица 2

Месяцы	I	II	III	IV	V	VI
n	7280	6957	7883	7884	7892	7609
m/n	0,514	0,510	0,510	0,529	0,522	0,518

Окончание табл. 2

Месяцы	VII	VIII	IX	X	XI	XII	За год
n	7585	7393	7203	6903	6552	7132	88273
m/n	0,523	0,514	0,515	0,509	0,518	0,527	0,517

Приведем также данные о рождаемости в Москве за 2000 – 2002 гг. Согласно данным Мосгорстата, доля мальчиков в 2000 г. составляла 0,5185; в 2001 г. – 0,5132; в 2002 г. – 0,5153.

Приведенные примеры по рождаемости показывают, что, несмотря на то, что общее количество мальчиков меняется и в течение года, и по годам, частота рождения мальчиков довольно устойчиво колеблется около среднего значения 0,517.

Таким образом, опыты показывают, что при увеличении количества экспериментов частота события приближается к некоторому числу, которое называется вероятностью события A.

Отметим, что опыты могут быть различного характера. Например, при контроле качества продукции из некоторого объема произведенного товара случайным образом выбирается сравнительно небольшая доля образцов, и исследуется их качество. Когда торговая фирма изучает спрос на свою продукцию, она посылает своих исследователей, который задают вопросы относительно спроса на продукцию фирмы. На основе собранных ответов делается вывод о потребностях всего населения. Конечно, не безразлично, каким образом выбраны люди (мужчины, женщины, жители сел или городов, молодые, пожилые). Таким образом, чтобы иметь успех, фирма должна вдумчиво подходить к сбору сведений.

В некоторых случаях вероятность события может быть определена и без проведения экспериментов – методами теории вероятностей. Методы теории вероятностей могут быть применены, когда известны вероятности более простых событий, чтобы, исходя из них, найти вероятности более сложных событий.

Например, если известно, что монета – симметричная, т.е. падает решкой с вероятностей 1/2, то на основе методов теории вероятностей можно ответить на вопрос: «Какова вероятность того, что монета дважды подряд выпадет решкой или какова вероятность того, что после 100 бросков относительная частота падения герба будет находиться между границами 0,45 и 0,55, и т.д.?»

§ 4. Классическое определение вероятности

Простейшими явлениями, для изучения которых целесообразно ввести понятие вероятности, являются опыты с равновероятными исходами. Предварим описание общей ситуации примерами.

Бросание монеты. Симметричная монета бросается с сильным закручиванием. В результате опыта выпадет либо герб, либо решка.

Бросание игральной кости. Бросается легкий правильный куб с занумерованными гранями. После ряда переворотов он останавливается, и игрок фиксирует количество очков на верхней грани.

Мысленный опыт. Разобьем поверхность футбольного шара на N конгруэнтных частей. Зафиксируем ту часть шара, которой в первый раз коснется бутса футболиста.

В каждом из описанных опытов встречается полная группа E_1, E_2, …, E_n несовместных событий. В опыте с бросанием монеты такими событиями будут: выпадение герба «Г» и выпадение решки «Р»; в опыте с игральной костью имеем события E_1, E_2, …, E_6, соответственно, выпадение одного, двух, …, шести очков; в последнем опыте имеем N таких событий, соответствующих делению поверхности мяча на части.

Имеется еще одна особенность полной группы событий, которую встречаем в этих опытах. Все события, входящие в группу E_1, E_2, …, E_n, одинаковы в отношении условий, определяющих исход опыта (или различия между ними настолько малы, что ими можно пренебречь). Ввиду этого возникает неопределенная ситуация: все события E_1, E_2, …, E_n являются равноправными претендентами на осуществление, но «в действительности» осуществляется лишь одно из них. Ввиду «одинаковости» событий, входящих в полную группу E_1, E_2, …, E_n, относительная частота их появления в длинной серии опытов будет одна и та же. Сообразно тому смыслу, который придается слову «вероятность», все события, входящие в полную группу E_1, E_2, …, E_n, равновероятны.

Пусть имеется какой-либо опыт Ω и полная группа несовместных и равновероятных событий E_1, E_2, …, E_n. Будем, вообще говоря, рассматривать не всевозможные события, связанные с опытом Ω, а лишь те события A, которые подразделяются на частные случаи E_1', E_2', …, E_m', входящие в состав полной группы несовместных и равновероятных между собой событий E_1, E_2, …, E_n. Формально причислим к рассматриваемым событиям и невозможное событие $\varnothing$, считая его подразделяющимся на 0 частных случаев. Такие события будем называть допустимыми.

В примере с игральной костью допустимыми являются все возможные события. Например, событие, состоящее в том, что выпадет число очков, кратное трем, подразделяется на два частных случая: выпадение трех или шести очков. Другая ситуация встречается в задаче о встрече бутсы футболиста с мячом. Если разбить поверхность мяча на n частей «по меридианам», то событие, состоящее в том, что бутса попадет в «экваториальную область» мяча, не кодифицируется (юридический термин), т.е. не является допустимым. Забегая вперед, отметим, что ограничение рассматриваемых событий допустимыми при аксиоматическом построении теории вероятностей формализуется тем, что фиксируется некоторое «поле событий».

Для допустимых событий A дается определение их вероятности – это как раз и есть классическое определение вероятности.

Определение 4.1. Если событие A подразделяется на m частных случаев, входящих в состав полной группы из n несовместных и равновероятных между собой событий, то вероятность $P(A)$ события A по определению равна

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Например, в опыте с игральной костью вероятность выпадения числа очков, кратного трем, равна $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, вероятность выпадения нечетного числа очков равна $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

В других терминах классическое определение вероятности звучит так: вероятность $P(A)$ события A равна отношению количества результатов опыта, благоприятствующих событию A, к числу всех возможных результатов опыта.

Поскольку имеется определение вероятности, то можно доказывать и теоремы, относящиеся к вероятностям.

Теорема 4.1. Если событие A влечет за собой событие B, то вероятность A не превосходит вероятности B:

$$P(A) \le P(B).$$

Доказательство. Так как каждый результат опыта, благоприятствующий A, также благоприятствует и B, то число благоприятствующих событию A результатов меньше или равно числу результатов, благоприятствующих наступлению события B. Числитель дроби $P(A)$ меньше или равен числителю дроби $P(B)$, а знаменатели у них равны. Значит,

$$P(A) \le P(B).$$

Теорема 4.2 (теорема сложения). Если событие A подразделяется на частные случаи B и C, то

$$P(A) = P(B) + P(C).$$

Доказательство. По определению $A = B \cup C$. Поэтому

$$P(A) = P(B \cup C).$$

Пусть событиям B и C благоприятствуют, соответственно, m_1 и m_2 результатов опыта, так что

$$P(B) = \frac{m_1}{n}, \quad P(C) = \frac{m_2}{n}.$$

Поскольку события B и C несовместны, то событию $B \cup C$ благоприятствует ровно $m_1 + m_2$ результатов опыта. Значит,

$$P(B \cup C) = \frac{m_1 + m_2}{n} = P(B) + P(C),$$

что и требовалось доказать.

Нетрудно доказать также обобщение этого результата.

Теорема 4.2′. Если событие A подразделяется на частные случаи $A_1, A_2, \ldots, A_s$, то вероятность A складывается из вероятностей событий $A_1, A_2, \ldots, A_s$:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_s).$$

Теорема 4.3. Вероятность опыта Ω равна единице.

Доказательство. Опыту благоприятствуют все его n результатов:

$$P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1.$$

В математической литературе иногда опыт называют достоверным событием. Этот термин не представляется удачным.

Теорема 4.4. Вероятность события, противоположного событию A, равна единице минус вероятность события A:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Доказательство. Так как события A и $\overline{A}$ несовместны, то событие $\Omega = A + \overline{A}$ подразделяется на частные случаи A и $\overline{A}$. Но тогда

$$P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A}),$$

и доказываемое утверждение следует из того, что

$$P(\Omega) = 1.$$

Теорема 4.5. Вероятность невозможного события равна нулю:

$$P(\varnothing) = 0.$$

Доказательство. В самом деле, событие, дополнительное к достоверному событию, есть невозможное:

$$\varnothing = \overline{\Omega}.$$

Значит,

$$P(\varnothing) + P(\Omega) = 1.$$

Но $P(\Omega) = 1$, и теорема доказана.

Теорема 4.6. Для любого (допустимого) события A

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Доказательство. В самом деле, для любого события A имеет место включение

$$\varnothing \subset \varnothing \bigcup A = A = A \cdot \Omega \subset \Omega,$$

откуда

$$0 = P(\varnothing) \le P(A) \le P(\Omega) = 1.$$

§ 5. Геометрические вероятности

В широком круге задач классическое определение вероятности оказывается недостаточным. Приведем примеры.

Пример 5.1. Рассмотрим опыт с рулеткой (см. пример В на с. 5). Поставим вопрос: «Какова вероятность того, что стрелка остановится в точке α, где α удовлетворяет неравенству:

$$\frac{1}{2} \le \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}\ ?»$$

Как говорится, «интуитивно ясно», что эта вероятность равна длине этого полуотрезка, т.е. вероятность равна

$$\frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Но формализовать это утверждение в рамках классического определения вероятности нельзя. Общее количество случаев здесь – бесконечное, количество благоприятствующих случаев тоже – бесконечное: $\frac{\infty}{\infty}$ – это неопределенность. К тому же в классическом определении вероятность всегда выражается рациональным числом, а в данном случае вероятность есть число иррациональное.

Пример 5.2. Пусть на прямой нанесена равномерная шкала с шагом в 1 см (пример Г на с. 6). Одна из точек шкалы отмечена как начало (рис. 2), после этого для точек шкалы определены координаты, которые являются целыми числами. В точку 0 поместим частицу и включим метроном. Поставим условие, что с каждым ударом метронома частица с вероятностью 1/2 может сдвинуться с того места, где она находится в одну из двух соседних точек.

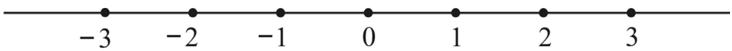

Рис. 2

Таким образом, рассматривается симметричное случайное блуждание по одномерной решетке.

Зададимся вопросом: «Какова вероятность того, что блуждающая частица когда-либо снова возвратится в исходную точку?»

Множеством всевозможных событий является множество бесконечных последовательностей $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \ldots,\ \varepsilon_n, \ldots$, состоящих из символов +1 и –1. Это множество – бесконечное. Множество благоприятствующих событию случаев тоже – бесконечное. Например, благоприятствующими движениями будут:

(1, –1, любая последовательность),

(1, –1, 1, –1, любая последовательность), (1, –1, 1, –1, 1, –1, любая последовательность).

По классическому определению: вероятность события, состоящего в том, что движущаяся по линейной решетке частица когда-либо пройдет через исходную точку, выражается в виде $\frac{\infty}{\infty}$, т.е. не определена.

Таким образом, классическое определение вероятности нельзя применить к опыту с бесконечным числом равновероятных исходов. Для описания такой ситуации вводят понятие геометрической вероятности. Если обозначить меру (длину, площадь, объем) области через mes, то геометрической вероятностью события A называется отношение меры области g ($g \subset G$), благоприятствующей появлению события A, к мере всей области G, т.е.

$$P(A) = \frac{\text{mes}(g)}{\text{mes}(G)}. \tag{5.1}$$

Для иллюстрации схемы геометрической вероятности рассмотрим следующие задачи.

Пример 5.3. Предположим, что на отрезок длины a, пусть это будет отрезок $[0, a]$, бросают наугад и независимо друг от друга две точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними будет не больше u?

Обозначим через ξ_1, ξ_2 координаты этих точек на отрезке $[0, a]$. Далее отложим ξ_1 на отрезке $[0, a]$ оси x_1, ξ_2 на отрезке $[0, a]$ оси x_2. Теперь опыт эквивалентен бросанию точки (ξ_1, ξ_2) на квадрат

$$\Omega = \left\{ 0 \le x_1 \le a;\ 0 \le x_2 \le a \right\}.$$

Очевидно, что искомая вероятность того, что $\Lambda = \left| \xi_1 - \xi_2 \right| \le u$ равна вероятности $P(A)$ попадания точки (ξ_1, ξ_2) в область A, ограниченную прямыми $x_2 = u + x_1$, $x_2 = -u + x_1$, (рис. 3, область заштрихована). Вероятность равна отношению площади заштрихованной области к площади квадрата, т. е. равна

$$P(A) = \frac{1}{a^2} \iint_A dx_1\, dx_2 = \frac{2au - u^2}{u^2}. \tag{5.2}$$

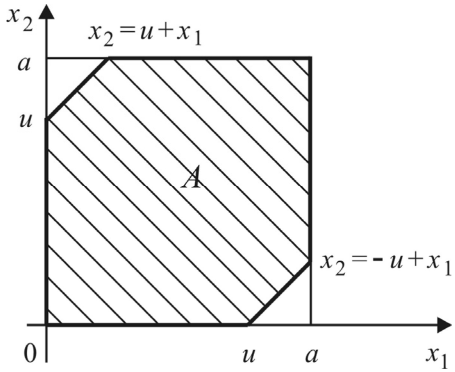

Рис. 3

Пример 5.4 (задача Бюффона). Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость случайным образом бросается игла длиной $2l$ ($l \le a$, рис. 4). Найти вероятность того, что игла пересечет какую-либо прямую. Обозначим через x расстояние от центра иглы до ближайшей прямой и через φ – угол, составленный иглой с этой прямой, $0 \le \varphi \le \pi$. Выражение «игла случайным образом бросается» означает:

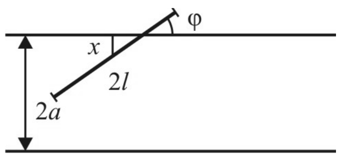

Рис. 4

а) центр иглы с одинаковой вероятностью попадает в любую точку отрезка длиной $2a$, перпендикулярного к параллельным прямым;

б) вероятность того, что угол φ, составленный иглой и проведенными прямыми, заключен между φ_1 и $\varphi_1 + \Delta\varphi$, пропорциональна $\Delta\varphi$;

в) величины x и φ независимы.

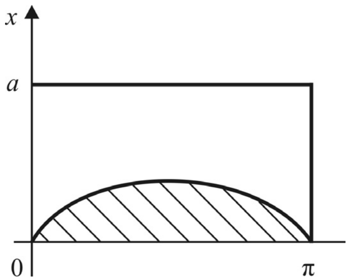

Рис. 5

Величинами x и φ вполне определяется положение иглы относительно параллельных прямых. Можно описать всевозможные положения иглы точками прямоугольника со сторонами a и π. Из рис. 5 видно, что для пересечения иглы с параллельной линией необходимо и достаточно, чтобы

$$x \le l \sin \varphi.$$

Искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной на рис. 5 области к площади прямоугольника со сторонами a и π, т. е.

$$P = \frac{1}{a\pi} \int_0^{\pi} l \sin \varphi \, d\varphi = \frac{2l}{a\pi}.$$

§ 6. Аксиматическое определение вероятности

Расширением классического определения вероятностей является излагаемый ниже аксиоматический подход построения теории вероятностей, предложенный А.Н. Колмогоровым в работе [12].

Так же, как и при классическом определении вероятности, исходным понятием является непустое множество Ω. Это множество называют пространством элементарных событий, выборочным пространством или опытом, а его элементы – элементарными событиями, исходами или элементарными исходами.

Событием назовем любое подмножество множества Ω или, что то же, некоторое множество элементарных событий.

Перейдем к следующему шагу в аксиоматическом построении теории вероятностей.

Казалось бы, можно рассматривать всевозможные подмножества Ω, т.е. всевозможные события. Однако, когда изучаются пространства с бесконечным количеством элементов в некоторых самых простых и естественных ситуациях (например, в задаче о рулетке), рассмотрение всевозможных подмножеств пространства Ω приводит к серьезным трудностям.

Будем рассматривать некоторые множества подмножеств пространства Ω или семейство подмножеств пространства Ω.

Множество событий $\mathfrak{A}$ называют борелевским полем, теперь чаще употребляют термин σ-алгебра (сигма-алгебра), если выполняются следующие требования.

1. В $\mathfrak{A}$ есть хотя бы один элемент (пусть даже невозможное событие $\varnothing$).

2. Если событие A принадлежит $\mathfrak{A}$, то и $\overline{A}$ принадлежит $\mathfrak{A}$.

3. Наряду с конечным или счетным множеством событий

$$A_1, A_2, ..., A_n, ...,$$

принадлежащими $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ принадлежат также и

$$\bigcup A_i .$$

Заметим, что если Ω есть конечное множество, то рассмотрение счетных сумм излишне.

Чтобы привыкнуть к понятию «борелевское поле событий», докажем несколько простых предположений.

Лемма 6.1. Всякое борелевское поле событий $\mathfrak{A}$ содержит достоверное событие Ω.

Доказательство. По первому требованию существует событие A, принадлежащее $\mathfrak{A}$. По второму требованию событие $\overline{A}$ принадлежит $\mathfrak{A}$ и событие

$$\Omega = A \bigcup \overline{A}$$

принадлежит $\mathfrak{A}$.

Лемма 6.2. Всякое борелевское поле событий содержит невозможное событие $\varnothing$.

Доказательство. Коль скоро Ω принадлежит $\mathfrak{A}$, то невозможное событие

$$\varnothing = \overline{\Omega}$$

принадлежит $\mathfrak{A}$.

Лемма 6.3. Пересечение двух множеств, принадлежащих борелевскому полю событий $\mathfrak{A}$, принадлежит $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Пусть A и B – элементы борелевского поля событий. Имеем

$$AB = \overline{\overline{AB}} = \overline{\overline{A} \bigcup \overline{B}} .$$

По второму требованию $\overline{A}$ и $\overline{B}$ принадлежат $\mathfrak{A}$, по третьему требованию $\overline{A} \bigcup \overline{B}$ принадлежит $\mathfrak{A}$, снова по второму требованию $\overline{\overline{A} \bigcup \overline{B}}$ принадлежит $\mathfrak{A}$.

Лемма 6.3′. Пересечение счетного семейства событий $A_1, A_2, ..., A_n, ...$, принадлежащих борелевскому полю событий $\mathfrak{A}$, принадлежит $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Следует из формулы алгебры событий

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \overline{\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}} = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}}$$

и требований определения борелевского поля событий.

Определение 6.1. Множество Ω вместе с выделенным в нем борелевским полем событий $\mathfrak{A}$ назовем измеримым пространством.

Измеримое пространство будем обозначать символом $(\Omega, \mathfrak{A})$.

Легко видеть, что если Ω – конечное множество, то совокупность всех подмножеств Ω, включая и пустое множество $\varnothing$ и само Ω, образуют борелевское поле событий $\mathfrak{A}$. Заметим, что рассмотрение бесконечных сумм и бесконечных произведений в этой ситуации излишне. Пара $(\Omega, \mathfrak{A})$ образует измеримое пространство.

Проиллюстрируем определение измеримого пространства на следующем примере: бросается игральная кость. Множество элементарных событий состоит из шести элементов E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6. Здесь E_i означает выпадение i очков. Борелевское поле событий $\mathfrak{A}$ состоит из $2^6 = 64$ элементов:

$$(\varnothing), (E_1), ..., (E_6), (E_1, E_2), ..., (E_5, E_6), (E_1, E_2, E_3), ..., (E_1, E_2, ..., E_6).$$

Здесь каждая скобка показывает, из каких элементов множества Ω составлено подмножество, входящее в качестве элемента в состав $\mathfrak{A}$, символом $\varnothing$ обозначили пустое множество (невозможное событие).

Итак, подготовлен третий шаг в построении теории вероятностей. Этот шаг оформляется в виде аксиом.

Пусть задано измеримое пространство $(\Omega, \mathfrak{A})$.

Аксиома 6.1. Каждому событию A из борелевского поля событий $\mathfrak{A}$ поставлено в соответствии неотрицательное число $P(A)$, называемое его вероятностью.

Аксиома 6.2. $P(\Omega) = 1$.

Аксиома 6.3. Если конечное или счетное множество событий $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ попарно несовместны, то

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i).$$

Измеримое пространство (Ω, $\mathfrak{A}$) вместе с определенной на элементах $\mathfrak{A}$ функцией $P(A)$, удовлетворяющей аксиомам 6.1 – 6.3, будем называть вероятностным пространством (Ω, $\mathfrak{A}$, P).

Теперь можно дать определение предмета теории вероятностей. Теория вероятностей является наукой о вероятностных пространствах (Ω, $\mathfrak{A}$, P). В такой трактовке теория вероятностей является такой же аксиоматической математической теорией, как линейная алгебра, теория групп и т.д.

Таким образом, дано определение предмета теории вероятностей: во-первых, наведен порядок в основных понятиях, и, тем самым, создана основа для доказательства утверждений; во-вторых, расширены возможности приложений – дело в том, что примеры вероятностных пространств (Ω, $\mathfrak{A}$, P) можно находить не только в бросании монет, костей, случайных блужданий, но, как это не парадоксально, в «чистой математике», например в теории чисел, прилагая теоремы теории вероятностей, открывать и доказывать арифметические теоремы (так исследуют свойства функции Эйлера $\varphi(n)$, функции $\nu(n)$ – количества различных простых делителей числа n и т.д.). Но, с другой стороны, надо иметь ввиду, что вероятностная интуиция человека шире рамок, которые налагает аксиоматика. В вычислительных методах Монте-Карло используют так называемые случайные и псевдослучайные числа. Для теоретического осмысления этой практики система аксиом, описанная выше, по-видимому, является чересчур ограничительной.

Установим несколько элементарных теорем теории вероятностей.

Теорема 6.1. $P(\varnothing) = 0$. Вероятность невозможного события равна нулю.

Доказательство. $\Omega = \varnothing \bigcup \Omega$ и $\varnothing \bigcap \Omega = \varnothing$, значит,

$$P(\Omega) = P(\varnothing) + P(\Omega),$$

откуда $P(\varnothing) = 0$.

Теорема 6.2. Для любого события A

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Доказательство. $A \bigcup \overline{A} = \Omega$ и $A \cdot \overline{A} = \varnothing$.

Теорема 6.3. Каково бы ни было событие A (из борелевского поля событий $\mathfrak{A}$)

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Доказательство. $P(A) \ge 0$ по аксиоме 1. Далее, $P(A) + P(\overline{A}) = 1$. Но $P(\overline{A}) \ge 0$, значит, $P(A) \le 1$.

Теорема 6.4. Если событие A влечет событие B, то

$$P(A) \le P(B).$$

Доказательство. Пусть $A \subset B$. Обозначим $B \setminus A = \overline{A}B$, $B \setminus A$ – множество элементов, принадлежащих B, но не принадлежащих A ($B \setminus A$ возможно будет и пустым множеством). Очевидно,

$$B = (B \setminus A) \bigcup A,$$

откуда из того, что $P(B \setminus A) \ge 0$, следует $P(B) \ge P(A)$.

Теорема 6.5. Пусть A и B – два события (из борелевского поля $\mathfrak{A}$), тогда $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Доказательство. В суммах

$$A \bigcup B = A \bigcup (B \setminus AB),$$

$$B = AB \bigcup (B \setminus AB)$$

слагаемые – несовместные события, поэтому по аксиоме 6.3

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B \setminus AB),$$

$$P(B) = P(AB) + P(B \setminus AB),$$

отсюда

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Проиллюстрируем вероятностное пространство в задаче о случайном бросании симметричной монеты. Пространство Ω состоит из двух элементов: A – выпадение герба; B – выпадение «решки». Измеримое пространство (Ω, $\mathfrak{A}$) образовано из пространства Ω и борелевского поля подмножеств $\mathfrak{A}$, а именно из четырех подмножеств

$$(\varnothing), (A), (B), (\Omega) = (A, B)$$

($\varnothing$ – пустое множество). В силу того, что монета предполагается симметричной, полагаем

$$P(A) = \frac{1}{2} = P(B).$$

Это согласуется с тем, что $P(A) + P(B) = 1$. Важно заметить, что для одного и того же измеримого пространства (Ω, $\mathfrak{A}$) можно по-разному определить вероятности. Так, смещение центра тяжести монеты может привести к тому, что для описания бросания нужно будет пользоваться вероятностным пространством (Ω, $\mathfrak{A}$, P), где $P(A) = p$ – некоторое число, удовлетворяющее неравенству $0 < p < 1$, $P(B) = q = 1 - p$.

Глава 2

УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. НЕЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ

§ 7. Понятие условной вероятности. Формула полной вероятности

Одно из фундаментальных понятий теории вероятностей – понятие условной вероятности.

Рассмотрим опыт Ω, такой, для которого существует полная группа E_1, E_2, …, E_n равновероятных, независимых событий. Это – простая ситуация, в которой можно пользоваться классическим определением вероятности. Пусть A и B – допустимые события, связанные с опытом Ω, причем B не является невозможным событием. Предположим, что известно о наступлении события B. Цель состоит в том, чтобы определить вероятность $P(A|B)$ события A при условии осуществления события B.

Обратимся к примерам.

Пример 7.1. Брошены две игральные кости. Чему равна вероятность того, что сумма выпавших на них очков равна восьми (событие A), если известно, что эта сумма есть четное число (событие B). Составим протокол опыта: это пара чисел (a, b), a, $b = 1, 2, \ldots, 6$; число a есть количество очков, выпавших на первой кости, число b есть количество очков, выпавших на второй кости. Имеем 36 возможных протоколов. Событие A наступает при следующих протоколах

$$(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2),$$

Таким образом, вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{5}{36}.$$

Если событие B осуществилось, то уменьшилось количество возможных случаев, а именно стали возможны только такие протоколы:

$$\begin{array}{l}(1,5),(2,6),\\(1,3),(2,4),(3,5),(4,6),\\(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),\\(3,1),(4,2),(5,3),(6,4),\\(5,1),(6,2).\end{array}$$

Таким образом, естественно считать условную вероятность равной

$$P(A|B)=\frac{5}{18}.$$

Чтобы подчеркнуть различие вероятности $P(A)$ события A от его условной вероятности $P(A|B)$ события A при условии наступления события B вероятность $P(A)$ называют безусловной.

Пример 7.2. Из колоды карт последовательно вынуты две карты. Найти:

а) безусловную вероятность того, что вторая карта окажется тузом;

б) условную вероятность того, что вторая карта является тузом, если первоначально был вынут туз.

Обозначим через A событие, состоящее в появлении туза на втором месте, а через B – событие, состоящее в появлении туза на первом месте. Очевидно, $A = A\cdot\overline{B}\cup A\cdot B$. В силу несовместности AB и $A\overline{B}$ имеем

$$P(A)=P(A\overline{B})+P(AB).$$

При вынимании двух карт из колоды, учитывая их порядок, может произойти $36\cdot 35$ случаев. Из них благоприятствующих событию AB – $4\cdot 3$ случаев, а событию $A\overline{B}$ – $4\cdot 32$ случаев. Таким образом,

$$P(A)=\frac{4\cdot 3}{36\cdot 35}+\frac{32\cdot 4}{36\cdot 35}=\frac{1}{9}.$$

Если первая карта есть туз, то в колоде осталось 35 карт и среди них только три туза. Следовательно,

$$P(A|B)=\frac{3}{35}.$$

Нетрудно решить задачу о нахождении условной вероятности в ситуации классического определения вероятности. Пусть с опытом Ω связана полная группа из n равновероятных и несовместных событий E_1, E_2, …, E_n. Пусть событию A благоприятствует m событий из этой группы, событию B (не являющемуся невозможным) благоприятствует k событий, а событию AB – r событий из группы E_1, E_2, …, E_n. Ясно, что $r \le m$, $r \le k$. Если событие B произошло, то это означает, что наступило одно из k событий E_j, благоприятствующих B. При условии наступления события B событию A благоприятствует r и только r событий. Таким образом,

$$P(A|B) = \frac{r}{k} = \frac{r/n}{k/n} = \frac{P(AB)}{P(B)}. \qquad (7.1)$$

Точно также, если A не есть невозможное событие, то

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}. \qquad (7.2)$$

Соединяя воедино равенства (7.1) и (7.2), получим следующее утверждение: если A и B не являются невозможными событиями, то

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B), \qquad (7.3)$$

т.е. вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого при условии, что первое произошло.

Это утверждение называется теоремой умножения.

Замечание 7.1. Формула $P(AB) = P(A)P(B|A)$ остается в силе, если B – пустое событие, а формула $P(AB) = P(B)P(A|B)$ остается в силе, если A – пустое событие.

В ситуации, когда к опыту Ω может быть применено классическое определение вероятности, формула (7.1)

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

получена. Теперь обратимся к ситуации, когда к опыту Ω классическое определение вероятности не применимо. Здесь можно использовать лишь аксиоматическое введение вероятности. Но в аксиоматической теории средств для доказательства формулы (7.1) нет. Поэтому в аксиоматической теории имеем по определению: при

$P(B) > 0$ условная вероятность $P(A|B)$ события A при условии наступления события B равна

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Из определения условной вероятности $P(A|B)$ непосредственно следует теорема умножения вероятностей: для событий A и B, таких, что $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

В приложениях часто используется так называемая формула полной вероятности.

Пусть Ω – некоторый опыт, и B_1, B_2, … – полный набор несовместных событий, связанных с этим опытом.

Теорема 7.1 (формула полной вероятности). Пусть A – событие, связанное с опытом Ω. Имеет место формула

$$P(A) = \sum_k P(A|B_k)P(B_k). \tag{7.4}$$

Доказательство. В самом деле, так как $\Omega = \bigcup_k B_k$ и $A = A\Omega$, то

$$A = A\bigcup_k B_k = \bigcup_k AB_k.$$

По формуле сложения вероятности имеем

$$P(A) = \sum_k P(AB_k).$$

Теперь согласно определению условной вероятности (7.1) имеем

$$P(AB_k) = P(A|B_k)P(B_k).$$

Это и доказывает теорему.

Приведем пример на использование формулы полной вероятности при решении задач.

Пример 7.3 (задача о разорении игрока). Рассмотрим азартную игру «орлянку». Игрок заказывает герб или решку, после чего бросает (строго симметричную) монету. Если выпадет та сторона, которая была названа игроком, то он выигрывает, получая 1 руб., в противном случае он столько же проигрывает. Предположим, что начальный капитал игрока составляет x рублей и игрок ставит своей целью довести его до некоторой суммы a рублей. Игра заканчивается, когда игрок либо наберет заранее определенную сумму a, либо разорится так и не набрав желаемую сумму в a рублей.

Ясно, что искомая вероятность зависит от начального капитала x и конечной суммы a. Обозначим через $p(x)$ вероятность того, что имея x рублей, игрок все же разорится. Событие «игрок разорится» обозначим символом A. На первом шаге игрок может либо выиграть, обозначим это событие через B_1, либо проиграть, обозначим это событие через B_2. Вероятность разорения игрока при условии, что он на первом шаге выиграл, равна

$$P(A|B_1) = p(x+1),$$

так как после выигрыша капитал игрока останется равным $x+1$. Аналогично, вероятность события A при условии проигрыша игрока на первом шаге равна $p(x-1)$:

$$P(A|B_2) = p(x-1).$$

События B_1 и B_2 образуют полную систему несовместных событий, причем $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$. Формула полной вероятности (7.4) дает следующие соотношения для искомой вероятности $p(x)$:

$$p(x) = \frac{1}{2}(p(x+1) + p(x-1)) \tag{7.5}$$

при $x = 1, 2, \ldots, a-1$. Очевидно, что следует положить

$$p(0) = 1, \quad p(a) = 0. \tag{7.6}$$

Тогда имеем систему линейных уравнений (7.5) с граничными условиями (7.6). Эта система неоднородна: именно при $x = 1$ получается

$$2p(1) - p(2) = 1.$$

Согласно общей теореме линейной алгебры неоднородная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда соответствующая однородная система

$$p'(x) = \frac{1}{2}(p'(x+1) + p'(x-1)), \tag{7.7}$$

$$p'(0) = 0, \quad p'(a) = 0 \tag{7.8}$$

не имеет других решений, кроме $p'(x) = 0$ для всех $x = 0, 1, \ldots, n$. Поскольку $p'(x)$ для внутренних точек x есть среднее арифметическое двух соседних решений, то $|p'(x)|$ не превосходит

$$\max\,(p'(x+1), p'(x-1)).$$

Следовательно, $|p'(x)|$ не имеет максимума во внутренней точке, максимум $|p'(x)|$, если и достигается, то в граничных точках. Но $|p'(0)| = 0$ и $|p'(a)| = 0$. Значит,

$$p'(x) = 0, \quad x = 0, 1, \ldots, a.$$

Таким образом, система (7.5) с граничными условиями (7.6) имеет единственное решение. Легко проверить, что указанная система вместе с граничным условием удовлетворяется, если положить

$$p(x) = 1 - \frac{x}{a}, \quad x = 0, 1, \ldots, a.$$

Не будем останавливаться на том, как это решение найдено. Важно другое, согласно вышеизложенному, это – единственное решение. Задача о разорении игрока решена:

$$p(x) = 1 - \frac{x}{a}, \quad x = 0, 1, \ldots, a.$$

§ 8. Некоторые применения формулы полной вероятности

8.1. Задача о серии успехов

Рассмотрим последовательность независимых опытов (т.е. таких, при которых результат одного опыта никак не влияет на результат другого). В каждом таком опыте (или испытании) может произойти или не произойти некоторое событие, которое будем называть «успехом». Вероятность того, что в отдельном испытании произойдет «успех» равна p, где p – фиксированное число, $0 < p < 1$. Значит, вероятность того, что в отдельном испытании произойдет «неуспех» равна $q = 1 - p$. Будем вести протокол таких последовательных испытаний:

УННУ…,

в котором на очередном месте пишем букву У – «успех», если событие осуществилось, и пишем букву Н – «неуспех», если событие не осуществилось.

Задача о серии успехов формулируется следующим образом.

Пусть α и β – два натуральных числа. Некто Саша и Петя, производящие испытания, поспорили: что произойдет раньше – серия, составленная из α последовательных «успехов» или β последовательных «неуспехов»?

Поставим вопрос: «Какова вероятность того, что Саша выиграет?» Вопрос, вроде бы, звучит ясно, но на самом деле следует расшифровать те термины, которые в нем фигурируют. Вероятность всегда определяется в связи с пространством элементарных событий; значит, нужно спросить себя, о каком множестве элементарных событий идет речь. Если возьмем любое фиксированное количество n испытаний, то исход спора может не определиться. Значит, в этой задаче сталкиваемся с абстракцией неограниченной последовательности испытаний. Пространством элементарных событий здесь являются бесконечные последовательности, составленные из букв «У» и «Н»:

УННУУУНУНН…

Для того, чтобы определить вероятность интересующих нас событий, прибегнем к искусственному приему. Рассмотрим сначала конечную последовательность независимых испытаний, а затем совершим переход к пределу при $n \to \infty$. За n испытаний Саша либо выиграет, либо проиграет, либо исход окажется не решенным. Пусть x_n – вероятность того, что за n испытаний Саша выиграет, y_n – вероятность того, что за n испытаний Саша проиграет, z_n – вероятность того, что игра не окончится. Когда n возрастает, то вероятность ничейного исхода z_n может только убывать, в то время как x_n и y_n могут только возрастать. Значит, по теореме о монотонных последовательностях существуют пределы

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n; \quad y = \lim_{n\to\infty} y_n; \quad z = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

По определению число x назовем вероятностью выигрыша Саши, число y – вероятностью выигрыша Пети, число z – вероятностью того, что игра закончится вничью.

Выяснив принципиальные моменты, решим теперь задачу о серии успехов.

Пусть A – событие, состоящее в том, что серия в α последовательных успехов произойдет раньше, чем серия в β последовательных неуспехов. Событие A означает выигрыш Саши и, значит, $P(A) = x$. Если u и υ – условные вероятности события A при условиях, что, соответственно, результатом первого испытания является успех или неуспех, то $x = pu + q\upsilon$.

Сначала предположим, что результатом первого испытания является успех. В этом случае событие A может произойти только следующими α взаимоисключающими способами.

1. Ближайшие $\alpha - 1$ испытаний приводят к успеху. Вероятность такого способа осуществления события A равна $p^{\alpha-1}$.

2. Первый неуспех произойдет на ν-м испытании, где $2 \le \nu \le \alpha$, обозначим это событие через H_ν. $P(H_\nu) = p^{\nu-2}q$. Если осуществилось событие H_ν, то, значит, серия в α последовательных успехов не осуществилась, все начинается сначала, причем начинается с неуспеха, т.е. условная вероятность события A при наступлении события H_ν равна υ

$$P(A | H_\nu) = \upsilon .$$

Итак, по формуле полной вероятности имеем

$$H = p^{\alpha-1} + q\upsilon + q\upsilon p + q\upsilon p^2 + \ldots + q\upsilon p^{\alpha-2} =$$

$$= p^{\alpha-1} + \upsilon q \frac{1-p^{\alpha-1}}{1-p} = p^{\alpha-1} + \upsilon(1-p^{\alpha-1}) .$$

Вычислим теперь υ, т.е. предположим, что результатом первого испытания является неуспех. Как может при этом осуществляться событие A? Если первый успех осуществляется на шаге μ, где $\mu \le \beta$, то событие A не происходит. Для того, чтобы событие A произошло, необходимо (но, вообще говоря, не достаточно), чтобы первый успех наступил на μ шаге, где $2 \le \mu \le \beta$. Обозначим событие, состоящее в том, что первый успех произойдет на μ шаге, $2 \le \mu \le \beta$, через F_μ. Ясно, что

$$P(F_\mu) = q^{\mu-2} p, \quad 2 \le \mu \le \beta.$$

Если осуществилось событие F_μ, то, значит, серия из β последовательных неуспехов не получилась, и все начинается сначала, причем начинается с успеха. Значит, условная вероятность осуществления события A при наступлении события F_μ, $2 \le \mu \le \beta$, равна u:

$$P(A \mid F_\mu) = u.$$

По формуле полной вероятности

$$\upsilon = u(p + qp + \ldots + q^{\beta-2} p) = up \frac{1-q^{\beta-2}}{1-q} = u(1-q^{\beta-1}).$$

Из уравнений

$$u = p^{\alpha-1} + \upsilon(1-p^{\alpha-1}),$$

$$\upsilon = u(1-q^{\beta-1})$$

находим u и υ для

$$x = pu + q\upsilon,$$

получим выражение

$$x = p^{\alpha-1} \frac{1-q^{\beta}}{p^{\alpha-1} + q^{\beta-1} - p^{\alpha-1} q^{\beta-1}}.$$

Для того, чтобы найти y, т.е. вероятность проигрыша Саши, заметим, что проигрыш Саши есть выигрыш Пети, и с этой точки зрения повторим все рассуждения. Это сделать очень просто: надо только поменять местами обозначения p и q, а также α и β. Это дает

$$y = q^{\beta-1} \frac{1-p^{\alpha}}{p^{\alpha-1} + q^{\beta-1} - p^{\alpha-1} q^{\beta-1}}.$$

Поскольку возможны только три исхода: выигрыш Саши, проигрыш Саши и ничья, то

$$x + y + z = 1.$$

Но

$$x + y = \frac{p^{\alpha-1} - p^{\alpha-1}q^{\beta} + q^{\beta} - q^{\beta-1}p^{\alpha}}{p^{\alpha-1} + q^{\beta-1} - p^{\alpha-1}q^{\beta-1}} = 1 .$$

Значит, $z = 0$, т.е. вероятность ничейного исхода равна нулю.

Приведем численные примеры на применение этих формул. При бросании симметричной монеты ($q = p = 1/2$) вероятность того, что серия из двух гербов произойдет раньше, чем серия из трех решек, равна 0,7; вероятность того, что два последовательных герба выпадут раньше, чем четыре последовательных решки, равна 5/6; вероятность того, что три последовательных герба выпадут раньше, чем четыре последовательных решки, равна 15/22 и т.д.

8.2. Задача о возвращении при блужданиях по решетке

Будем говорить о симметрических блужданиях по линейной решетке, о симметрических блужданиях по квадратной решетке, о симметрических блужданиях по кубической решетке.

При симметрическом блуждании по линейной решетке частица в начальный момент выходит из начала координат и в каждую единицу времени с вероятностью, равной 1/2, может сдвинуться в одну из двух точек.

При симметрическом блуждании по квадратной решетке частица в начальный момент времени выходит из начала координат и в каждую единицу времени с вероятностью, равной 1/4, может сдвинуться в любую из четырех соседних точек решетки.

При симметрическом блуждании по кубической решетке частица в начальный момент времени выходит из начала координат и в каждый момент времени с вероятностью, равной 1/6, может сдвинуться в одну из шести соседних точек с той, в которой она находится.

Займемся вопросом о том, какова вероятность события, заключающегося в том, что блуждающая по решетке точка когда-то снова вернется в начало координат. Обратим внимание на один принципиальный момент. В классическом определении вероятность есть отношение количества благоприятствующих событию случаев к общему количеству случаев. Когда ставится вопрос о вероятности события, состоящего в том, что блуждающая по решетке частица когда-либо вернется в начало координат, то как общее количество случаев равно бесконечности, так и количество случаев, при которых это событие осуществляется, равно бесконечности.

Поэтому надо позаботиться о том, чтобы вложить смысл в те слова, которые употребляются.

Рассмотрим какое-либо большое натуральное число N и рассмотрим всевозможные блуждания из N шагов, начинающиеся в начале координат. Можно говорить о вероятности $f_i^{(N)}$ события, заключающегося в том, что возвращение в начало координат впервые произойдет на i-м шаге ($i \le N$).

Пусть $l(i)$ – количество путей по решетке, которые на i-м шаге впервые возвращаются в начало координат, $b = 2$, 4, 6, соответственно, в линейном, квадратном и кубическом случаях. Пусть $N \ge i$. Очевидно,

$$f_i^{(N)} = \frac{l(i) b^{N-i}}{b^N} = \frac{l(i)}{b^i}.$$

В силу этого равенства индекс N у $f_i^{(N)}$ можно опустить: $f_i = f_i^{(N)}$ есть вероятность того, что частица впервые вернется в начало координат на i-м шаге. Заметим, что при любом натуральном k

$$\sum_{i=1}^{k} f_i \le 1.$$

Значит, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i$ сходится. Сумму ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i$ можно интерпретировать как вероятность того, что блуждающая по решетке частица когда-либо снова вернется в начало координат.

Приведем теорему Пойя о блужданиях.

Теорема 8.1. Вероятность того, что блуждающая по решетке частица когда-либо снова вернется в начало координат, равна единице в линейном случае, равна единице в квадратном случае и равна

$$1 - \frac{1}{\dfrac{1}{(2\pi)^3} \displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3}{1 - \frac{1}{3}(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \cos\varphi_3)}} \approx 0{,}34053$$

в кубическом случае.

§ 9. Формулы Байеса

Как следствие из теорем, относящихся к условной вероятности, выведем так называемые формулы проверки гипотез или формулы Байеса. (Данные формулы были получены в работе Т. Байеса «Опыт решения одной проблемы теории вероятностей», которая вышла в 1763 г.)

Рассматривается полная конечная система A_1, A_2, …, A_n несовместных событий, связанных с опытом Ω. Рассмотрим также некоторое событие, связанное с опытом Ω. Требуется найти вероятность события A_i, если известно, что событие B произошло. Согласно теореме умножения имеем

$$P(A_i B) = P(B)P(A_i \big| B) = P(A_i)P(B \big| A_i)\,.$$

Отсюда

$$P(A_i \big| B) = \frac{P(A_i)P(B \big| A_i)}{P(B)}\,.$$

Теперь, используя формулу полной вероятности (7.4), находим

$$P(A_i \big| B) = \frac{P(A_i)P(B \big| A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \big| A_j)}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (9.1)$$

Это как раз и есть формулы Байеса.

Пусть некоторое событие может протекать в различных условиях, относительно характера которых может быть сделано n гипотез A_1, A_2, …, A_n. По каким-либо причинам известны вероятности этих гипотез $P(A_i)$ до испытания; кроме того, известно, что гипотеза A_i сообщает событию B вероятность $P(B \big| A_i)$. Произведем опыт, в котором событие B наступило. Это должно вызвать переоценку вероятностей гипотез. Формула Байеса количественно решает этот вопрос: с помощью этих формул сравниваются доопытные (априорные) вероятности с послеопытными (апостериорными).

Приведем чисто иллюстративный пример на применение формул Байеса (9.1).

Из целой колоды карт (36 карт) потеряли одну. Кто-то высказал предположение, что пропала пика. Для проверки этого предположения провели такой «следственный эксперимент»: из колоды вынули наудачу две карты, которые оказались пиками.

Обозначим через A событие, состоящее в том, что потеряна пика, а через $\overline{A}$ – событие, состоящее в том, что потеряна карта другой масти. Ясно, что $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(\overline{A})=\frac{3}{4}$. Обозначим через B событие, состоящее в том, что из испорченной колоды вынули подряд две пики:

$$P(B|A)=\frac{8}{35}\cdot\frac{7}{34}=\frac{4}{85},$$

$$P(B|\overline{A})=\frac{9}{35}\cdot\frac{8}{34}=\frac{36}{35\cdot 17}.$$

По формуле Байеса

$$P(A|B)=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{85}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{85}+\frac{3}{4}\cdot\frac{36}{35\cdot 17}}=\frac{7}{34}.$$

После эксперимента, как и следовало ожидать, оценка вероятности потери пики уменьшилась:

$$\frac{7}{34}<\frac{1}{4}.$$

Формула Байеса – одна из фундаментальных теорем, относящихся к теории эксперимента.

§ 10. Независимые события

С понятием условной вероятности связано понятие независимости событий.

Можно подумать, что понятие независимости событий как интуитивно очевидное, не требует определения. На самом деле это не так. Во-первых, доказательные рассуждения можно проводить лишь тогда, когда обладаем точным определением понятия; далее, если в простых ситуациях независимость событий как бы непосредственно очевидна, то бывают ситуации, когда независимость некоторых событий приходится доказывать.

Пусть имеются события A и B, связанные с некоторым опытом Ω.

Определение 10.1. Говорят, что событие A независимо от события B, если имеет место равенство

$$P(A|B) = P(A), \tag{10.1}$$

т.е. если наступление события B не изменяет вероятности наступления события A.

Пусть событие A независимо от события B, то из теоремы умножения вероятностей

$$P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

находим (при $P(A) \neq 0$)

$$P(B) = P(B|A),$$

т.е. свойство независимости событий взаимно: если событие A независимо от события B, то событие B независимо от события A.

Таким образом, можно просто говорить о независимости событий A и B.

Та же теорема умножения позволяет дать эквивалентное предыдущему определение независимости событий: события A и B независимы, если

$$P(A)P(B) = P(AB). \tag{10.2}$$

Пример 10.1. Предположим, что из карточной колоды наугад вынута одна карта. Имеем схему опыта с конечным числом $N = 52$ равновероятных исходов. Рассмотрим события A_1 – «вынимание карты пиковой масти» и A_2 – «вынимание дамы». Поскольку в колоде имеется 13 карт пиковой масти, то $P(A_1) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$. Количество результатов, благоприятствующих выниманию дамы, равно четырем, и, значит, $P(A_2) = \frac{1}{13}$. Событие A_1A_2 означает, что вынимается пиковая дама, этому событию благоприятствует один исход, и, значит, $P(A_1A_2) = \frac{1}{52}$. Но

$$P(A_1A_2) = \frac{1}{52} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{13} = P(A_1)P(A_2).$$

Тем самым согласно определению независимых событий события «вынимается дама» и «вынимается карта пиковой масти» являются независимыми событиями.

Добавим к колоде три карты: одну пустышку и двух джокеров. Событие A_1 теперь имеет вероятность $\frac{13}{55}$, событие A_2 – вероятность $\frac{4}{55}$, а событие A_1A_2 – вероятность $\frac{1}{55}$, так как

$$\frac{13}{55}\cdot\frac{4}{55}\neq\frac{1}{55},$$

то события A_1 и A_2 являются в новой ситуации зависимыми.

Заметим, что если события A и B независимы, то независимы также события $\overline{A}$ и $\overline{B}$. В самом деле, так как

$$P(B\big|A)+P(\overline{B}\big|A)=1$$

и, по определению, $P(B\big|A)=P(B)$, то

$$P(\overline{B}\big|A)=1-P(B)=P(\overline{B}).$$

Высказанную мысль можно выразить в более общей форме: если события A и B независимы, то независимы также каждые два события $(\overline{A},B)$, $(A,\overline{B})$, $(\overline{A},\overline{B})$.

Обобщим теперь понятие независимости двух событий на совокупность нескольких событий.

Определение 10.2. События B_1, B_2, …, B_s, связанные с опытом Ω, называются независимыми в совокупности, если при любом натуральном r, $1\le r\le s$, и любом наборе r индексов

$$1\le i_1<i_2<i_3<...<i_r\le s,$$

$$P(B_{i_1}B_{i_2}...B_{i_r})=P(B_{i_1})P(B_{i_2})...P(B_{i_r}).$$

Заметим, что для независимости в совокупности нескольких событий недостаточно их попарной независимости.

Приведем пример.

Пример 10.2. Представим, что грани тетраэдра окрашены: 1-я – в красный цвет (событие A); 2-я – в желтый (событие B); 3-я – в фиолетовый (событие C); 4-я – во все эти три цвета (событие ABC). Вероятность того, что грань, на которую упадет тетраэдр, будет иметь в своей окраске красный цвет, равна 1/2. В самом деле, граней – четыре, из них имеют в своей окраске красный цвет две:

$$P(A) = \frac{1}{2}.$$

Аналогично,

$$P(B) = P(C) = \frac{1}{2}.$$

Допустим, что известно: выпала грань, которая имеет в своей окраске желтый цвет; вероятность того, что при этом будет в окраске еще красный цвет, т.е. вероятность $P(A|B)$ равна

$$P(A|B) = \frac{1}{2}$$

(граней, имеющих в окраске желтый цвет, – две, из них одна имеет в окраске и красный цвет). Точно также

$$P(B|C) = P(C|A) = P(B|A) = P(C|B) = P(A|C) = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, события *A*, *B*, *C* попарно независимы.

Однако если известно, что осуществились события *B* и *C*, то заведомо осуществилось и событие *A*, т.е.

$$P(A|BC) = 1.$$

Если предположить, что события *A*, *B*, *C* независимы в совокупности, то будем иметь

$$1 = P(A|BC) = \frac{P(ABC)}{P(BC)} = \frac{P(A)P(B)P(C)}{P(B)P(C)} = P(A).$$

Но $P(A) \neq 1$. Полученное противоречие показывает, что попарно независимые события *A*, *B* и *C* в совокупности могут быть зависимы.

Глава 3

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ

§ 11. Описание схемы

Наука развивается от простого к сложному. В отношении теории вероятностей это означает, что нужно идти от менее сложных задач к более сложным. Простейшей схемой теории вероятности является схема независимых испытаний.

Опишем постановку задачи.

Рассматривается последовательность полных групп несовместных событий

$$A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, ..., A_k^{(s)}, \quad s = 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

(напомним: термин «полная группа событий» означает, что при любом s хотя бы одно из событий $A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, ..., A_k^{(s)}$ должно произойти). Предполагается, что вероятность осуществления события $A_i^{(s)}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ в группе с индексом s не зависит от номера s, а также от того, какое событие появится в группах с другими значениями s.

Часто бывает полезно придерживаться иной терминологии и говорить, что производится n независимых испытаний, каждое из которых имеет k несовместных исходов $A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, ..., A_k^{(s)}$, причем вероятность исхода $A_i^{(s)}$ не зависит от номера испытания s и равна p_i ($i = 1, 2, \ldots, k$). В силу несовместности и единственной возможности исходов $A_i^{(s)}$ имеем

$$\sum p_i = 1 .$$

Эта схема впервые была рассмотрена Я. Бернулли в случае $k = 2$; указанный случай называется схемой Бернулли. В схеме Бернулли обычно полагают $p_1 = p$ и $p_2 = 1 - p = q$.

Нужно сразу связать это определение с какой-либо наглядной схемой. Самое простое – это последовательное бросание монеты. Полная группа здесь состоит из двух событий ($k = 2$): выпадение герба и решки. Если монета – симметричная, то при любом s

$$P(A_1^{(s)}) = P(A_2^{(s)}) = \frac{1}{2} .$$

Появление орла или решки в очередном испытании не зависит от того, какие были исходы предыдущих испытаний. Это положение требует некоторого усилия мысли. Некто Марбе в 1916 г. опубликовал сочинение, в котором утверждает, что после серии из 17 выпадений герба выпадение решки становится более вероятным, чем выпадение герба. При этом он наделяет природу памятью или по предложенной терминологии отрицает независимость последовательных испытаний. Но теорию Марбе следует отвергнуть потому, что она не подтверждается опытами.

Простейшая задача, относящаяся к схеме независимых испытаний, состоит в определении вероятности P_n $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ того, что при n испытаниях событие $A_1^{(s)}$ наступит m_1 раз, событие $A_2^{(s)}$ – m_2 раз, …, событие $A_k^{(s)}$ – m_k раз. При этом должно быть выполнено равенство

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n .$$

Ограничимся рассмотрением этой задачи для случая схемы Бернулли. Пусть вероятность события $A_1^{(s)}$ равна p, вероятность события $A_2^{(s)}$ – q ($p + q = 1$). Величину $P_n(m_1, m_2)$ будем обозначать просто $P_n(m)$, это вероятность того, что при n независимых испытаниях событие $A_1^{(s)}$ появится точно m раз.

Сначала найдем вероятность того, что события $A_1^{(s)}$ наступают при определенных m испытаниях, скажем с номерами $s_1, s_2, \ldots, s_m$, а при остальных ($n - m$) испытаниях не наступают. Так как вероятности совместного осуществления независимых событий перемножаются, то искомая вероятность равна

$$q...q\underbrace{p}_{s_1-\text{е место}}q...q\underbrace{p}_{s_2-\text{е место}}...\underbrace{p}_{s_m-\text{е место}}...q=p^m q^{n-m}\,.$$

Но номера s_1, s_2, …, s_m можно выбрать $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ способами. Это количество способов, сколькими может осуществиться событие, состоящее в том, что событие $A_1^{(s)}$ наступит точно m раз, каждый способ имеет одну и ту же вероятность, равную $p^m q^{n-m}$. Итак,

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}\,.$$

Так как все возможные несовместные между собой исходы n испытаний состоят в появлении события $A_1^{(s)}$ 0, 1, …, n раз, то

$$\sum_{m=0}^{n}P_n(m)=1\,.$$

Это соотношение может быть выведено без всякой теории вероятностей, на основании формулы бинома Ньютона

$$\sum_{m=0}^{n}P_n(m)=\sum_{m=0}^{n}C_n^m p^m q^{n-m}=(p+q)^n=1\,.$$

Заметим, что вероятность $P_n(m)$ равна коэффициенту при x^m в разложении бинома $(q+px)^n$ по степеням x. В силу этого свойства совокупности вероятностей $P_n(m)$ называют биномиальным законом распределения вероятностей.

Не будем останавливаться на доказательстве, лишь скажем, что в общем случае

$$P_n(m_1,m_2,...,m_k)=\frac{n!}{m_1!m_2!...m_k!}p_1^{m_1}p_2^{m_2}...p_k^{m_k}\,,$$

а также, что $P_n(m_1,m_2,...,m_k)$ есть коэффициент при $x_1^{m_1}x_2^{m_2}...x_k^{m_k}$ в разложении полинома

$$(p_1x_1+p_2x_2+...+p_kx_k)^n\,.$$

Установим простейшие свойства биномиального распределения $P_n(m)$ при постоянном *n*, как функции *m*.

Для $0 \le m < n$

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} = \frac{n-m}{m+1}\frac{p}{q}.$$

Если $(n-m)p > (m+1)q$, т.е. если $np - q > m$, то

$$P_n(m+1) > P_n(m);$$

если $m = np - q$, то

$$P_n(m+1) = P_n(m);$$

если $m > np - q$, то

$$P_n(m+1) < P_n(m).$$

Видно, что вероятность $P_n(m)$ с увеличением *m* сначала возрастает, затем достигает максимума, а при дальнейшем росте *m* убывает. При этом если $np - q$ есть целое число, то максимальное значение вероятность $P_n(m)$ принимает для двух значений *m*, именно для

$$m_0 = np - q \text{ и } m_0' = np - q + 1 = np + p.$$

Если же $np - q$ не есть целое число, то максимальное значение вероятность достигает при

$$m = [np - q] + 1$$

([ ] – знак целой части). Те значения (или два значения) *m*, для которых $P_n(m)$ принимает наибольшее значение, называют вероятнейшим значением биномиального распределения.

§ 12. Закон больших чисел Бернулли

Теорема 12.1. Пусть производится *n* независимых испытаний, при каждом из которых вероятность наступления события *A* равна *p*. Обозначим через *m* количество наступлений события *A* при этих *n* испытаниях. Тогда при любом $\delta > 0$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| > \delta\right) < \frac{1}{4\delta^2 n}.$$

Доказательство. Обозначим $q = 1 - p$. Вероятность того, что при n испытаниях событие A наступит m раз, равна

$$C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Значит, вероятность неравенства

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| > \delta$$

равна

$$\sum_{\left|\frac{m}{n} - p\right| > \delta} C_n^m p^m q^{n-m},$$

где «$\left|\frac{m}{n} - p\right| > \delta$» под знаком суммы обозначает, что суммирование ведется по тем индексам m, для которых выполняется неравенство $\left|\frac{m}{n} - p\right| > \delta$.

Продолжаем рассуждать. Раз $\left|\frac{m}{n} - p\right| > \delta$, то

$$1 \le \frac{\left(\frac{m}{n} - p\right)^2}{\delta^2}.$$

Тогда

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| > \delta\right) = \sum_{\left|\frac{m}{n} - p\right| > \delta} C_n^m p^n q^{n-m} \le$$

$$\le \frac{1}{\delta^2} \sum_{\left|\frac{m}{n} - p\right| > \delta} \left(\frac{m}{n} - p\right)^2 C_n^m p^n q^{n-m} \le$$

$$\le \frac{1}{\delta^2} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{m}{n} - p\right)^2 C_n^m p^m q^{n-m},$$

ибо от добавления новых слагаемых сумма может лишь увеличиться.

Итак,

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|>\delta\right)\le\frac{1}{n^2\delta^2}\sum_{m=0}^{n}(m-np)^2C_n^m p^m q^{n-m} .$$

Остается вычислить сумму, стоящую в правой части последнего неравенства. Имеем тождество

$$(x+y)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^m x^m y^{n-m} . \qquad (12.1)$$

Дифференцируя это тождество по x и умножая на x, получим

$$\sum_{m=0}^{n}mC_n^m x^m y^{n-m}=nx(x+y)^{n-1} , \qquad (12.2)$$

и, повторяя еще раз такую операцию, получим

$$\sum_{m=0}^{n}m^2C_n^m x^m y^{n-m}=(x+y)^{n-2}(xn(x+y)+n(n-1)x^2)=$$

$$=n(x+y)^{n-2}(xy+nx^2)=nx(y+nx)(x+y)^{n-2} . \qquad (12.3)$$

Полагая $x=p$, $y=1-p=q$ в равенствах (12.1) – (12.3), найдем, что

$$1=\sum_{m=0}^{n}C_n^m p^m q^{n-m} ,$$

$$np=\sum_{m=0}^{n}mC_n^m p^m q^{n-m} ,$$

$$np(q+np)=\sum_{m=0}^{n}m^2C_n^m p^m q^{n-m} ,$$

и в силу этих соотношений, получим

$$\sum_{m=0}^{n}(m-np)^2C_n^m p^m q^{n-m}=\sum_{m=0}^{n}m^2C_n^m p^m q^{n-m}-2pn\sum_{m=0}^{n}mC_n^m p^m q^{n-m}+$$

$$+n^2p^2\sum_{m=0}^{n}C_n^m p^m q^{n-m}=np(q+np)-2n^2p^2+n^2p^2=npq .$$

И значит,

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|>\delta\right)\le\frac{1}{n^2\delta^2}npq=\frac{pq}{n\delta^2}.$$

Так как $(p+q)^2-4pq=(p-q)^2$, то

$$pq\le\frac{(p+q)^2}{4}=\frac{1}{4}.$$

Итак,

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|>\delta\right)\le\frac{1}{4\pi\delta^2}.$$

Теорема доказана.

Как следствие из этого получается следующая знаменитая теорема Бернулли («закон больших чисел»).

Теорема 12.2. В схеме независимых испытаний с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, можно утверждать, что дробь $\frac{m}{n}$ (где n – число испытаний; m – число повторений события при этих испытаниях) сколь угодно мало отличается от вероятности p события A при неограниченном увеличении n.

Или в точной формулировке: каково бы ни было $\delta>0$ и $\varepsilon>0$, найдется такое n_0 (n_0 зависит от δ и ε), что при $n\ge n_0$

$$1\ge P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\delta\right)\ge1-\varepsilon.$$

Доказательство. Зададим $\varepsilon>0$ и $\delta>0$. В самом деле, поскольку вероятность события не превосходит единицы, то

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\delta\right)\le1.$$

Далее, по предыдущей доказанной теореме

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\delta\right)=1-P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|>\delta\right)\ge1-\frac{1}{4n\delta^2}.$$

Если $n > \frac{1}{4\varepsilon\delta^2}$, то

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \delta\right) \ge 1 - \varepsilon .$$

Теорема доказана.

Можно и так с формулировать закон больших чисел: при любом $\delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \delta\right) = 1 .$$

Закону больших чисел придают большое методологическое значение. Отмечалось, что в естественно-научных приложениях под вероятностью явления понимают частоту явления в длинной серии событий. Закон больших чисел «вроде бы» научно обосновывает такой подход. Закон больших чисел, выведенный, исходя из аксиоматического подхода, показывает, что при большом числе испытаний вероятность любой ошибки в частотной вероятностной оценке вероятности индивидуального события p ничтожно мала.

§ 13. Локальная предельная теорема Муавра – Лапласа

Решим такую задачу.

Вероятность изделию некоторого производства оказаться бракованным равна 0,005. Чему равна вероятность того, что в партии из 10000 изделий будет ровно 40 бракованных?

В нашем примере

$$n = 10000 , \quad p = 0{,}005 , \quad q = 0{,}995 ,$$

$$P_{10000}(40) = C_{10000}^{40} (0{,}995)^{9960} (0{,}005)^{40} .$$

Задача решена точно, но все же какое получилось число?

Пример приведен для иллюстрации мысли, что вычисление вероятностей по заданным формулам бывает очень сложным при больших n. Поэтому в теории вероятностей пользуются так называемыми асимптотическими формулами. Это приближенные формулы, которыми можно заменять без большой погрешности вычисления по точным формулам.

Казалось бы дело идет о занятиях вычислительной математикой. Однако это лишь предлог для того, чтобы войти в круг некоторых законов природы. Образно выражаясь, есть широчайший класс явлений (массовых явлений), в которых естественно пренебрегаются вклады, вносимые небольшой частью объектов и поэтому асимптотические формулы выступают как законы природы.

Займемся асимптотическими формулами, относящимися к схеме Бернулли.

Сначала о так называемой локальной предельной теореме Муавра – Лапласа. Сформулируем эту теорему. Пусть μ – число наступлений события в n независимых испытаниях, при каждом из которых вероятность этого события равна постоянной p, отличной от нуля и единицы. Пусть, как и раньше, $P_n(m)$ есть вероятность того, что эта величина μ_n будет удовлетворять равенству $\mu_n = m$. Обозначим

$$x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}},$$

где $q = 1 - p$.

Теорема 13.1. При $n \to \infty$ и m изменяющимся так, что x_m изменяется в любом заданном конечном интервале (a, b)

$$\frac{\sqrt{npq} \cdot P_n(m)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_m^2}{2}}} \rightrightarrows 1$$

($\rightrightarrows$ – знак равномерной сходимости).

Доказательство. Доказательство опирается на формулу Стирлинга (ее вывод приводится в приложении).

Уже отмечалось, что

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Вспоминая обозначения $x_m = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$, положим

$$\Pi_n(x_m) = \sqrt{npq} P_n(m) = \sqrt{npq} P_n(np + x_m \sqrt{npq}) =$$

$$=\sqrt{npq}\,\frac{n!}{m!(n-m)!}\,p^m q^{n-m}\,.$$

Применим формулу Стирлинга в виде

$$n!=\sqrt{2\pi}n^n\sqrt{n}\,e^{-n}(1+\alpha_n)\,,$$

где $\alpha_n\to 0$ при $n\to\infty$, следовательно,

$$\Pi_n(x_m)=\frac{\sqrt{nqp}}{\sqrt{2\pi}}\frac{n^n\sqrt{n}}{m^m\sqrt{m}(n-m)^{n-m}\sqrt{n-m}}\frac{(1+\alpha_n)}{(1+\alpha_m)(1+\alpha_{n-m})}\,p^m q^{n-m}\,.$$

Эту формулу запишем в другом виде

$$\Pi_n(x_m)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}R_n(x_m)S_n(x_m)T_n(x_m)\,,$$

где

$$R_n(x_m)=\left(\frac{np}{m}\right)^m\left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}\;;$$

$$S_n(x_m)=\sqrt{\frac{np}{m}}\sqrt{\frac{nq}{n-m}}\;;$$

$$T_n(x_m)=\frac{1+\alpha_n}{(1+\alpha_m)(1+\alpha_{n-m})}\,.$$

Изучим поведение при $n\to\infty$ и $a\le x_m\le b$ каждого из множителей $R_n(x_m)$, $S_n(x_m)$, $T_n(x_m)$ в отдельности.

Рассмотрим множитель $R_n(x_m)$: имеем

$$m=np+x_m\sqrt{npq}\,,$$

$$n-m=nq-x_m\sqrt{npq}\,.$$

Следовательно,

$$R_n(x_m)=\left(\frac{np}{np+x_m\sqrt{npq}}\right)^m\left(\frac{nq}{nq-x_m\sqrt{npq}}\right)^{n-m}=$$

$$=\left(1+x_m\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{np}}\right)^{-m}\left(1-x_m\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{nq}}\right)^{-(n-m)}\,.$$

Найдем логарифм последнего выражения, пользуясь формулой Тейлора для $\ln(1+z)$ с двумя членами

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2}(1+\omega(z)),$$

где $\omega(z) \to 0$ при $z \to 0$. Получим

$$\ln R_n(x_m) = -m\left[x_m \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{np}} - x_m^2 \frac{q}{2np}(1+\omega')\right] -$$

$$-(n-m)\left[-x_m \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{nq}} - x_m^2 \frac{p}{2nq}(1+\omega'')\right],$$

где $\omega' = \omega\left(x_m \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{np}}\right)$, $\omega'' = \omega\left(x_m \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{nq}}\right)$ и, следовательно, если $n \to \infty$ и $a \le x_m \le b$, то ω' и ω'' равномерно стремятся к нулю. Поскольку

$$m = np + x_m\sqrt{npq}$$

и

$$n - m = nq - x_m\sqrt{npq},$$

то получим

$$\ln R_n(x_m) = -x_m^2 q + x_m^2 \frac{q}{2}(1+\omega') + x_m^3 \frac{q\sqrt{q}}{2\sqrt{np}}(1+\omega') -$$

$$-x_m^2 p + x_m^2 \frac{p}{2}(1+\omega'') - x_m^3 \frac{p\sqrt{p}}{2\sqrt{nq}}(1+\omega'').$$

И, приняв во внимание, что $p+q=1$, будем иметь

$$\ln R_n(x_m) = -\frac{x_m^2}{2} + \frac{x_m^2}{2}(q\omega' + p\omega'') +$$

$$+\frac{x_m^3}{2\sqrt{n}}\left(\frac{q\sqrt{q}}{\sqrt{p}}(1+\omega') + \frac{p\sqrt{p}}{\sqrt{q}}(1+\omega'')\right).$$

Таким образом, если $n \to \infty$ и $a \le x_m \le b$, то

$$\ln R_n(x_m) - \left(-\frac{x_m^2}{2} \right) \rightrightarrows 0.$$

Или, пропотенцировав, получим

$$R_n(x_m) : e^{-\frac{x_m^2}{2}} \rightrightarrows 1.$$

Рассмотрим множитель $S_n(x_m)$:

$$S_n(x_m) = \sqrt{\frac{np}{m}} \sqrt{\frac{nq}{n-m}} .$$

Имеем

$$S_n(x_m) = \sqrt{\frac{np}{np + x_m \sqrt{npq}}} \sqrt{\frac{nq}{nq - x_m \sqrt{npq}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{1 + x_m \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{np}}}} \sqrt{\frac{1}{1 - x_m \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{nq}}}} .$$

Отсюда ясно видно, что при $n \to \infty$ и $a \le x_m \le b$

$$S_n(x_m) \rightrightarrows 1.$$

Наконец, рассмотрим множитель $T_n(x_m)$. Из формул

$$m = np + x_m \sqrt{npq} , \quad n - m = nq - x_m \sqrt{npq}$$

видно, что когда $n \to \infty$ и $a \le x_m \le b$, то m и $n-m$ стремятся к бесконечности:

$$T_n(x_m) = \frac{1 + \alpha_n}{(1 + \alpha_m)(1 + \alpha_{n-m})} .$$

Видно, что при $n \to \infty$ $\alpha_n \to 0$, $\alpha_m \to 0$, $\alpha_{n-m} \to 0$, а конечное количество величин, стремящихся к нулю, равномерно стремится к нулю. Значит, при $n \to \infty$, $a \le x_m \le b$

$$T_n(x_m) \rightrightarrows 1.$$

Итак,

$$\frac{\sqrt{2\pi}\Pi_n(x_m)}{e^{-x_m^2/2}} \rightrightarrows 1.$$

Наконец, вспомнив, что обозначено через $\Pi_n(x_m)$, получим

$$\frac{\sqrt{npq}P_n(m)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x_m^2/2}} \rightrightarrows 1.$$

Теорема доказана.

Для использования локальной предельной теоремы нужны таблицы функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Для наших нужд достаточно малой таблицы, которую можно найти во 2-й части данного учебного пособия (табл. П.2).

Как предлог для изложения локальной предельной теоремы, рассматривалась такая задача: вероятность изделий некоторого производства оказаться бракованным равна 0,005. Чему равна вероятность того, что из 1000 наудачу взятых изделий бракованных окажется ровно 40? Итак, $p = 0,005$, $n = 10000$, $m = 40$. По только что доказанной теореме

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{nqp}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}$$

и для нашего примера

$$\sqrt{npq} = \sqrt{10000 \cdot 0,005 \cdot 0,995} = \sqrt{49,75} \approx 7,05,$$

$$\frac{m-np}{\sqrt{npq}} \approx \frac{40 - 10000 \cdot 0,005}{7,05} = \frac{40-50}{7,05} \approx -1,42,$$

$$P_{10000}(40) \approx \frac{1}{7,05}\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(1,42)^2}{2}}.$$

По таблице находим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(1,42)^2}{2}} \approx 0,1456,$$

$$P_{10000}(40) \approx \frac{1}{7,05} \cdot 0,1456 \approx 0,0206.$$

Непосредственный расчет показывает, что

$$P_{10000}(40) = 0,0197.$$

Было приведено качественное исследование биномиального распределения $P_n(m)$ при постоянном n как функции m. Видно, что при $m < np - q$ величина $P_n(m)$ увеличивается, а при $m > np - q$ уменьшается. Функция

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}$$

приближает величину $P_n(m)$. И для этой функции наблюдается сходная картина. При фиксированном n для $m < np$ функция возрастает, при $m = np$ достигает наибольшего значения, а при $m > np$ убывает.

§ 14. Интегральная предельная теорема Муавра – Лапласа

Локальную предельную теорему для схемы Бернулли, иными словами локальную предельную теорему Муавра – Лапласа, используем для вывода другой предельной теоремы, так называемой интегральной предельной теоремы Муавра – Лапласа. Сформулируем интегральную предельную теорему.

Теорема 14.1. Пусть μ – количество наступления некоторого события в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность этого события равна p, причем $0 < p < 1$. Для любых конечных a и b при $n \to \infty$ имеет место соотношение

$$P\left(a \le \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < b\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \qquad (14.1)$$

Заметим прежде, чем доказывать формулу (14.1), что была сформулирована только часть того утверждения, которое называется интегральной предельной теоремой для схемы Бернулли. Утверждается еще, что стремление в формуле (14.1) имеет место и при $a = -\infty$ и стремление равномерное относительно a и b

$$-\infty \le a < b < \infty .$$

Введем для краткости обозначение

$$P_n(a,b) = P\left(a \le \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < b \right).$$

Для величины $P_n(a,b)$ имеем выражение

$$P_n(a,b) = \sum P_n(m),$$

где сумма распространена на те значения m, для которых

$$a \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < b .$$

Вспомним обозначение: для $0 \le m \le n$

$$x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} .$$

Положим также

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\sqrt{npq}} = \frac{n - np + 1}{\sqrt{npq}} = \frac{nq + 1}{\sqrt{npq}} .$$

Заметим, что при $m = 0, 1, \ldots, n$ $\quad x_{m+1} - x_m = \dfrac{1}{\sqrt{npq}}$. При достаточно больших n точка x_0 уходит как угодно далеко влево, а точка x_{n+1} как угодно далеко вправо.

Можно записать

$$P_n(a,b) = \sum_{a \le x_m < b} P_n(m)$$

(суммирование ведется по тем m, для которых $a \le x_m < b$).

Определим теперь функцию $y = \Pi_n(x)$ следующим образом:

$$y = \Pi_n(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x < x_0 \quad \left(x_0 = \dfrac{-np}{\sqrt{npq}} \right); \\ \sqrt{npq} P_n(m), \quad x_m \le x < x_{m+1}, \quad m = 0, 1, \ldots, n; \\ \\ 0 \quad \text{при} \quad x \ge x_{n+1}, \end{cases}$$

$\Pi_n(x)$ – кусочно-постоянная функция (рис. 6).

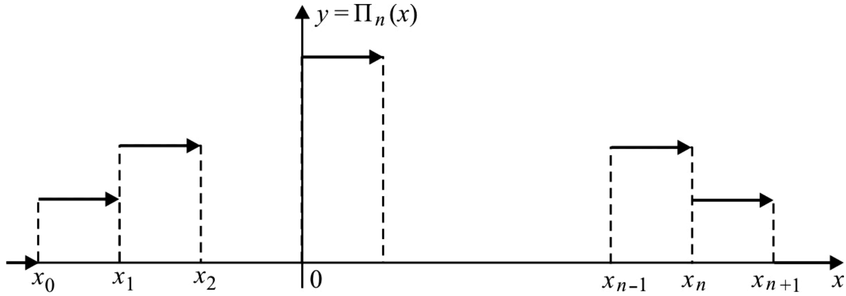

Рис. 6

Обозначения согласованы с обозначениями, которые использовались при изложении локальной предельной теоремы, там использовался символ $\Pi_n(x)$.

Вычислим, чему равна площадь, ограниченная кривой $y = \Pi_n(x)$, осью *Ox* и прямыми $x = x_m$ и $x = x_{m+1}$:

$$\int\limits_{x_m}^{x_{m+1}} \Pi_n(x) dx = \sqrt{npq} P_n(m)(x_{m+1} - x_m) = P_n(m).$$

Предположим, что числа a и b конечны. Отметим на оси *Ox* точки a и b. При достаточно больших n на $\left[a, a + \dfrac{1}{\sqrt{npq}} \right)$ найдется единственная точка $x_{\underline{m}}$, на $\left[b, b+\dfrac{1}{\sqrt{npq}}\right)$ найдется единственная точка $x_{\overline{m}}$. Выражение $P_n(a,b)$ можно записать таким образом

$$P_n(a,b) = \sum_{x_{\underline{m}} \le x_m < x_{\overline{m}}} P_n(m).$$

Отсюда следует, что искомая вероятность

$$P_n(a,b) = \sum_{x_{\underline{m}} \le x_m < x_{\overline{m}}} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \Pi_n(x)dx = \int_{x_{\underline{m}}}^{x_{\overline{m}}} \Pi_n(x)dx,$$

т.е. равна площади, заключенной между кривой $y = \Pi_n(x)$, осью Ox и прямыми $x = x_{\underline{m}}$ и $x = x_{\overline{m}}$.

Имеем

$$P_n(a,b) = \int_{x_{\underline{m}}}^{x_{\overline{m}}} \Pi_n(x)dx = \int_a^b \Pi_n(x)dx + \int_b^{x_{\overline{m}}} \Pi_n(x)dx - \int_a^{x_{\underline{m}}} \Pi_n(x)dx.$$

Обозначим

$$\rho_n = \int_b^{x_{\overline{m}}} \Pi_n(x)dx - \int_a^{x_{\underline{m}}} \Pi_n(x)dx.$$

Отмечалось, что максимальное значение вероятности $P_n(m)$ достигается, когда $m = m_0$, где $m_0 = [np - q + 1] = [(n+1)p]$, $[\ \ ]$ – знак целой части. Значит, максимальное значение $\Pi_n(x)$ приходится на интервал

$$0 \le \frac{[(n+1)p] - np}{\sqrt{npq}} \le x < \frac{[(n+1)p] + 1 - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{2}{\sqrt{npq}}.$$

При достаточно больших значениях n $\dfrac{2}{\sqrt{npq}} \le 1$, т.е. при достаточно больших n

$$0 \le \frac{m_0 - np}{\sqrt{npq}} \le 1,$$

и можно применить локальную предельную теорему и заключить, что при достаточно больших n

$$\max \Pi_n(x) = \Pi_n(x_{m_0}) < 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \max e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Отсюда заключаем, что

$$|\rho_n| = \left| \int_b^{x_{\overline{m}}} \Pi_n(x)dx - \int_a^{x_{\underline{m}}} \Pi_n(x)dx \right| \le \int_b^{x_{\overline{m}}} \max \Pi_n(x)dx + \int_a^{x_{\underline{m}}} \max \Pi_n(x)dx <$$

$$< \sqrt{\frac{2}{\pi}}(x_{\overline{m}} - b + x_{\underline{m}} - a).$$

По определению $x_{\overline{m}}$ и $x_{\underline{m}}$

$$x_{\overline{m}} - b \le \frac{1}{\sqrt{npq}} \quad \text{и} \quad x_{\underline{m}} - a \le \frac{1}{\sqrt{npq}}$$

и, значит,

$$|\rho_n| < \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{\sqrt{npq}}.$$

Поэтому при $n \to \infty$

$$\rho_n \to 0.$$

Таким образом, $P_n(a, b)$ лишь на величину бесконечно малую отличается от интеграла

$$\int_a^b \Pi_n(x)dx.$$

По локальной предельной теореме при $n \to \infty$

$$\Pi_n(x_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_m^2}{2}} (1 + \alpha_n(x_m)),$$

где $\alpha_n(x_m) \to 0$ равномерно относительно x_m в интервале $a \le x_m < b$.

Пусть теперь любое x из полуинтервала $[a, b)$, $a \le x < b$, находится в некотором полуинтервале $x_m \le x < x_{m+1}$. По построению

$$\Pi_n(x) = \Pi_n(x_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_m^2}{2}} (1 + \alpha_n(x_m)) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left[1 + e^{\frac{x^2 - x_m^2}{2}} (\alpha_n(x_m) + 1) - 1 \right].$$

Обозначим

$$\alpha_n(x) = e^{\frac{x^2 - x_m^2}{2}} [\alpha_n(x_m) + 1] - 1 .$$

Так как

$$\frac{x^2 - x_m^2}{2} = \frac{(x + x_m)(x - x_m)}{2} \le |x| \cdot |x - x_m| \le \frac{\max\,(|a|, |b|)}{\sqrt{npq}} ,$$

то

$$\lim_{n \to \infty} \max_{a \le x < b} \alpha_n(x) = 0 .$$

Собрав воедино выражение для $P_n(a, b)$, получим

$$P_n(a, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx + R_n ,$$

где

$$R_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} \alpha_n(x) dx + \rho_n .$$

Очевидно,

$$|R_n| \le \max_{a \le x < b} |\alpha_n(x)| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \rho_n .$$

Значит, $R_n \to 0$.

Доказано, что для любых конечных a и b при $n \to \infty$

$$P\left(a \le \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < b \right) \rightrightarrows \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}} dz ,$$

т.е. теорема доказана.

Приведем пример на применение интегральной предельной теоремы Муавра – Лапласа.

Задача 14.1. Вероятность изделию некоторого производства оказаться бракованным равна 0,005. Чему равна вероятность того, что из 10000 наудачу взятых бракованных изделий окажется не более 70?

$$\left.\begin{array}{l} n = 10000; \\ p = 0{,}005; \\ q = 0{,}995. \end{array}\right| \begin{array}{l} \sqrt{npq} = \sqrt{49{,}75}; \\ np = 50. \\ \end{array}$$

$$P(0 \le \mu \le 70) = P\left(-\frac{50}{\sqrt{49{,}75}} \le \frac{\mu - 50}{\sqrt{49{,}75}} \le \frac{20}{\sqrt{49{,}75}}\right) =$$

$$= P\left(-7{,}09 \le \frac{\mu - 50}{\sqrt{49{,}75}} \le 2{,}84\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-7{,}09}^{2{,}84} e^{-\frac{z^2}{2}} dz\,.$$

Как найти интеграл? Во 2-й части данного учебного пособия приведена таблица функции Лапласа (табл. П.3)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz\,.$$

Таблица составлена лишь для положительных значений x, ибо

$$\Phi(x) = -\Phi(-x)\,.$$

Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-7{,}09}^{2{,}82} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(2{,}82) - \Phi(-7{,}09) = \Phi(2{,}82) + \Phi(7{,}09) = 0{,}997\,.$$

Определение вероятности $P_n(m)$ при конечных значениях n и m по теоремам Муавра – Лапласа естественно требует оценки погрешности. Но простоты ради этого не делается в предположении (возможно и ошибочном), что при «наших» n и p не слишком близких к 0 и 1, применение теорем Муавра – Лапласа приводит к удовлетворительным результатам.

§ 15. Теорема Пуассона

Возвращаемся к теме: локальная предельная теорема для схемы Бернулли.

Если тщательно проиллюстрировать доказательство локальной предельной теоремы Муавра – Лапласа, то выяснится, что если p – малое число (или q – малое число), а n не настолько велико, чтобы произведение np было бы значительным, то приближение для $P_n(m)$, которое дает локальная предельная теорема Муавра – Лапласа, неудовлетворительно. Возникает задача об отыскании приближенных формул для $P_n(m)$ в случае малых p и не очень больших n. Такая формула была найдена Пуассоном.

Рассмотрим последовательность серий испытаний

E_{11},

E_{21}, E_{22},

E_{31}, E_{32}, E_{33},

…

E_{n1}, E_{n2}, E_{n3}, …, E_{nn},

…

Испытания в каждой серии взаимно независимы между собой. В каждом испытании каждой серии может произойти или не произойти некоторое событие A, но вероятность этого события изменяется от серии к серии. Обозначим вероятность появления события A в n-й серии через p_n. Через μ_n обозначается количество появлений события A в n-й серии. Сформулируем теорему Пуассона.

Теорема 15.1. Пусть a – некоторая положительная постоянная и пусть $p_n = \dfrac{a}{n}$. Тогда при $n \to \infty$ и $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$P(\mu_n = m) \to \frac{a^m}{m!} e^{-a}.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$P_n(m) = P(\mu_n = m) = C_n^m p_n^m (1 - p_n^m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} \left(\frac{a}{n}\right)^m \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{a^m}{m!}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{n^m\left(1-\frac{a}{n}\right)^m} =$$

$$= \frac{a^m}{m!}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n \frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)...\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{a}{n}\right)^m}.$$

При $n \to \infty$ $\left(1-\frac{a}{n}\right)^n \to e^{-a}$.

При $n \to \infty$ и фиксированном m

$$\left(1-\frac{a}{n}\right)^m \to 1 \quad \text{и} \quad 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)...\left(1-\frac{m-1}{n}\right) \to 1.$$

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{a^m}{m!}e^{-a}$, что и требовалось доказать.

Обозначим $P(m) = \frac{a^m}{m!}e^{-a}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ Заметим, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} P(m) = e^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} = e^{-a}e^{a} = 1.$$

Распределение вероятностей, определенное законом

$$P(m) = \frac{a^m}{m!}e^{-a}$$

(m – целое неотрицательное число), называется распределением Пуассона (или законом Пуассона) с параметром a (см. табл. П.1 во 2-й части данного учебного пособия).

Приведем пример, поясняющий применение приближенной формулы Пуассона. Вероятность попадания в цель при каждом отдельном выстреле равна 0,001 («трудная цель»). Найти вероятность попадания в цель двумя и более пулями, если число выстрелов равно 5000.

Здесь испытание – выстрел, событие – попадание в цель, $p = 0{,}001$ («малое число»), $n = 5000$ («большое число»), $a = np = 5$ («среднее число»). Можно применить формулу Пуассона

$$P(\mu_{5000} \geq 2) = \sum_{m=2}^{\infty} P_{5000}(m) = 1 - P_{5000}(0) - P_{5000}(1).$$

По теореме Пуассона $P_{5000}(0) \sim e^{-5}$, $P_{5000}(1) \sim 5e^{-5}$. Поэтому $P(\mu_n \geq 2) \sim 1 - 6e^{-5} \approx 0,9596$.

Глава 4

СХЕМА ЦЕПЕЙ МАРКОВА

§ 16. Понятие о схеме цепей Маркова

Простейшей схемой теории вероятностей является схема последовательных независимых испытаний. Сейчас рассмотрим более сложную схему, схему так называемых цепей Маркова (названных по имени академика А.А. Маркова).

Последовательность испытаний, в каждом из которых может произойти событие из некоторого множества возможных исходов, причем вероятность каждого из исходов $(n + 1)$-го опыта становится определенной лишь после того, как становится известным результат n-го опыта. Множество исходов (или его иногда называют множеством состояний) будем считать одинаковым для каждого номера испытаний.

Такая схема называется простой цепью Маркова.

Пример 16.1. Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых с вероятностью $0 < p < 1$ происходит событие У «успех» и с вероятностью $q = 1 - p$ это событие не происходит, т.е. происходит событие Н «неуспех». Допустим, что получилась некоторая последовательность

У Н Н У У Н Н Н У У…

Скомбинируем исходы парами, т.е. образуем последовательность

УН НН НУ УУ УН НН НН НУ УУ…

(идем по исходной последовательности «гусеницей»). Возможны четыре исхода каждого испытания

УУ УН НУ НН

Вероятность появления каждой пары на $(n + 1)$-м шаге определяется лишь после появления предыдущей n-й пары.

Эти вероятности определяются табл. 3 (матрицей переходных вероятностей).

Таблица 3

Исход n-го испытания	Исход $(n+1)$-го испытания			
	УУ	УН	НУ	НН
УУ	p	q	0	0
УН	0	0	p	q
НУ	p	q	0	0
НН	0	0	p	q

Пусть с n-м испытанием простой цепи Маркова связано получение некоторого значения величины x_n. Говорят, что последовательность случайных величин

$$x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...$$

образуют простую цепь.

Пример 16.2. Дана урна, содержащая x_0 белых и y_0 черных шаров ($x_0 + y_0 = c$). Производится n последовательных опытов, каждый из которых состоит в вынимании одного шара (после тщательного перемешивания) и вкладывания в урну, взамен вынутого, одинакового шара противоположного цвета. Обозначим через x_n количество шаров белого цвета в урне после n-го опыта. Вероятность того или иного значения величины x_{n+1} будет определена лишь после того, как узнаем значение x_n. Подсчитаем вероятность p_{ik} перехода от значения $x_n = i-1$ ($i = 1, 2, \ldots, c+1$) к значению $x_{n+1} = k-1$ (= 1, 2, …, $c+1$). Если количество белых шаров после n-го опыта равно $x_n = i-1$, то количество черных равно $c-i+1$; отсюда следует, что вероятность на $(n+1)$-м шаге вынуть черный шар равна $\dfrac{c-i+1}{c}$, а белый – $\dfrac{i-1}{c}$. В состояние $x_{n+1} = k-1$ можно перейти: из состояния $x_n = k-2$ (т.е. $i = k-1$), вынув черный шар; из состояния $x_n = k$ (т.е. $i = k+1$), вынув белый шар. Таким образом,

$$p_{ik}=\begin{cases}\dfrac{c-k+2}{c}, \ i=k-1;\\ \dfrac{k}{c}, \ i=k+1;\\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Будем рассматривать однородную цепь Маркова, т.е. цепи Маркова, в которых условная вероятность появления события $A_j^{(s+1)}$ в $(s+1)$-м испытании при условии, что в s-м испытании осуществилось событие $A_i^{(s)}$, не зависит от номера испытания. Назовем эту вероятность вероятностью перехода (или переходной вероятностью) и обозначим через p_{ij}: здесь первый индекс относится к предшествующему испытанию, а второй индекс ориентирует номер состояния, в какое переходит система в последующий момент времени.

Набор переходных вероятностей удобно записывать в виде матрицы

$$\pi_1=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk}\end{pmatrix}.$$

Отметим некоторые особенности матрицы переходных вероятностей π_1.

А. Элементы матрицы π_1 удовлетворяют неравенствам

$$0\le p_{ij}\le 1.$$

Б. Поскольку из любого состояния $A_i^{(s)}$ в s-м испытании система переходит в одно и только одно из состояний $A_j^{(s+1)}$ в $(s+1)$-м испытании, то вытекает равенство

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij}=1, \quad i=1, 2, \ldots, k.$$

Таким образом, сумма элементов каждой строки матрицы равна единице.

Обозначим через $P_{ij}(n)$ вероятность перехода из состояния $A_i^{(s)}$ в s-м испытании в состояние $A_j^{(s+1)}$ в $(s + n)$-м испытании.

Рассмотрим какое-нибудь промежуточное состояние с номером $s+m$ ($1 \le m \le n-1$). В этом испытании осуществляется какое-то одно из возможных событий $A_r^{(s+m)}$ ($1 \le r \le k$). Вероятность перехода в это состояние согласно только что введенным обозначениям равна $P_{ir}(m)$. Вероятность же перехода из состояния $A_r^{(s+m)}$ в состояние $A_j^{(s+n)}$ равна $P_{rj}(n-m)$. По формуле вероятности

$$P_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{k} P_{ir}(m) P_{rj}(n-m) . \qquad (16.1)$$

Обозначим через π_n матрицу перехода через n испытаний

$$\pi_n = \begin{pmatrix} P_{11}(n) & P_{12}(n) & \dots & P_{1k}(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{k1}(n) & P_{k2}(n) & \dots & P_{kk}(n) \end{pmatrix} .$$

Равенство (16.1) имеет следствием то, что между матрицами π_s с различными индексами выполняется соотношение

$$\pi_n = \pi_m \cdot \pi_{n-m} . \qquad (16.2)$$

Из соотношения (16.2) следует, в частности, что

$$\pi_2 = \pi_1 \cdot \pi_1 = \pi_1^2 ,$$

далее

$$\pi_3 = \pi_1 \cdot \pi_2 = \pi_2 \cdot \pi_1 = \pi_1^3 ,$$

и вообще при любом n

$$\pi_n = \pi_1^n .$$

Отметим частный случай формулы (16.1): при $m = 1$

$$P_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{k} p_{ir} P_{rj}(n-1) .$$

§ 17. Теорема о предельных вероятностях

При некоторых ограничениях цепи Маркова обладают так называемым эргодическим свойством: для любого состояния A_j ($j = 1, 2, \ldots, k$) при большом n вероятность $P_{ij}(n)$ почти не зависит от исходного состояния A_i, т.е. зависимость переходных вероятностей в состояние A_j из исходного состояния A_i при больших n практически нивелируется.

Докажем следующий результат.

Теорема 17.1. Если при некотором натуральном s все элементы матрицы перехода π_s положительны, то существуют такие постоянные числа p_j ($j = 1, 2, \ldots, k$), что независимо от индекса i имеют место равенства

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n) = p_j .$$

Доказательство. Покажем сначала, что с ростом n наибольшая из вероятностей $P_{ij}(n)$ не может возрастать, а наименьшая не может убывать.

В самом деле, при $n > 1$ имеет место неравенство

$$P_{ij}(n) = \sum_{l=1}^{k} p_{il} P_{lj}(n-1) \geq \min_{1\leq l\leq k} P_{lj}(n-1) \sum_{l=1}^{k} p_{il} = \min_{1\leq l\leq k} P_{lj}(n-1) .$$

Это неравенство имеет место при каждом i, в частности при том, при котором

$$P_{ij}(n) = \min_{1\leq i\leq k} P_{ij}(n) .$$

Таким образом, $\min\limits_{1\leq i\leq k} P_{ij}(n) \geq \min\limits_{1\leq i\leq k} P_{ij}(n-1)$.

Подобным же образом легко обнаруживается, что

$$\max_{1\leq i\leq k} P_{ij}(n) \leq \max_{1\leq i\leq k} P_{ij}(n-1) .$$

Вторая цель – показать, что при $n \to \infty$ максимум разности

$$\left| P_{ij}(n) - P_{lj}(n) \right|$$

($1 \leq l,\ j \leq k$) стремится к нулю.

Рассмотрим натуральное число s, фигурирующее в формулировке теоремы. Можно считать, что $s < n$. По формуле (16.1) имеем:

$$P_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{k} P_{ir}(s) P_{rj}(n-s).$$

Запишем

$$P_{ij}(n) - P_{lj}(n) = \sum_{r=1}^{k} P_{ir}(s) P_{rj}(n-s) - \sum_{r=1}^{k} P_{lr}(s) P_{rj}(n-s) =$$

$$= \sum_{r=1}^{k} (P_{ir}(s) - P_{lr}(s)) P_{rj}(n-s). \qquad (17.1)$$

Обозначим положительные разности $P_{ir}(s) - P_{lr}(s)$ через $\beta_{il}^{(r)}$. Так как $P_{lr}(s) > 0$, то

$$\beta_{il}^{(r)} < P_{ir}(s) \quad \text{и} \quad \sum_{(r)} \beta_{il}^{(r)} < \sum_{r=1}^{k} P_{ir}(s) = 1. \qquad (17.2)$$

Обозначим неположительные разности $P_{ir}(s) - P_{lr}(s)$ через $-\ \beta_{il}'^{(r)}$. Так как

$$\sum_{r=1}^{k} P_{ir}(s) = \sum_{r=1}^{k} P_{lr}(s) = 1,$$

то

$$\sum_{r=1}^{k} (P_{ir}(s) - P_{lr}(s)) = \sum_{(r)} \beta_{il}^{(r)} - \sum_{(r)} \beta_{il}'^{(r)} = 0. \qquad (17.3)$$

Из равенства (17.3) заключаем, что

$$h_{il} = \sum_{(r)} \beta_{il}^{(r)} = \sum_{(r)} \beta_{il}'^{(r)}.$$

Из (17.2) следует, что $0 \le h_{il} < 1$. Пусть $h = \max\limits_{1 \le i,\, l \le k} h_{il}$. Так как число возможных величин h_{il} конечно, то величина h также удовлетворяет неравенствам

$$0 \le h < 1. \qquad (17.4)$$

Из (17.1) находим, что при любых i и l (i, l = 1, 2, …, k)

$$\left|P_{ij}(n)-P_{lj}(n)\right|=\left|\sum_{(r)}\beta_{il}^{(r)}P_{rj}(n-s)-\sum_{(r)}\beta_{il}'^{(r)}P_{rj}(n-s)\right|\le$$

$$\le\left|\max_{1\le r\le k}P_{rj}(n-s)\sum_{(r)}\beta_{il}^{(r)}-\min_{1\le r\le k}P_{rj}(n-s)\sum_{(r)}\beta_{il}'^{(r)}\right|\le$$

$$\le h\left|\max_{1\le r\le k}P_{rj}(n-s)-\min_{1\le r\le k}P_{rj}(n-s)\right|\le$$

$$\le h\max_{1\le i,\,l\le k}\left|P_{ij}(n-s)-P_{lj}(n-s)\right|.$$

Следовательно,

$$\max_{1\le i,\,l\le k}\left|P_{ij}(n)-P_{lj}(n)\right|\le h\max_{1\le i,\,l\le k}\left|P_{ij}(n-s)-P_{lj}(n-s)\right|.$$

Применив это неравенство $\left[\frac{n}{s}\right]$ раз ([ ] – знак целой части числа), находим

$$\max_{1\le i,\,l\le k}\left|P_{ij}(n)-P_{lj}(n)\right|\le h^{\left[\frac{n}{s}\right]}\max_{1\le i,\,l\le k}\left|P_{ij}\left(n-\left[\frac{n}{s}\right]s\right)-P_{lj}\left(n-\left[\frac{n}{s}\right]s\right)\right|.$$

Так как

$$\left|P_{ij}(m)-P_{lj}(m)\right|\le 1,$$

то

$$\max_{1\le i,\,l\le k}\left|P_{ij}(n)-P_{lj}(n)\right|\le h^{\left[\frac{n}{s}\right]}.$$

При $n\to\infty$ $\left[\frac{n}{s}\right]\to\infty$ и поэтому, в силу (17.4) отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\le i,\,l\le k}\left|P_{ij}(n)-P_{lj}(n)\right|=0. \qquad (17.5)$$

Итак, доказано, что $\min\limits_{1\le i\le k} P_{ij}(n)$ есть неубывающая последовательность. Так как $\min\limits_{1\le i\le k} P_{ij}(n) \le 1$, то по свойству монотонной ограниченной последовательности существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \min_{1\le k\le n} P_{ij}(n) = \overline{p}_{ij} .$$

Точно также, поскольку $\max\limits_{1\le i\le k} P_{ij}(n)$ есть невозрастающая последовательность и $\max\limits_{1\le i\le k} P_{ij}(n) \ge 0$, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \max_{i\le k} P_{ij}(n) = \overline{\overline{p}}_j .$$

Теперь в силу (17.5) получаем $\overline{p}_j = \overline{\overline{p}}_j = p_j$. Теорема доказана.

Заметим также, что

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1 .$$

Действительно,

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k} P_{ij}(n) = 1 .$$

ФОРМУЛА СТИРЛИНГА

Во многие комбинаторные формулы входит выражение
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n\,.$$
Поэтому при решении асимптотических задач комбинаторики, имеющих большое значение для теории вероятностей, важно иметь асимптотическую формулу для величины $n!$.

Прежде всего, посмотрим, что можно сказать об этой величине на основании простых средств. Очевидно,
$$(x \ln x - x)' = \ln x\,.$$
По теореме Лагранжа о среднем значении
$$((k+1)\ln(k+1) - (k+1)) - (k \ln k - k) = \ln \xi\,,$$
где $k \le \xi \le k+1$. Значит,
$$\ln k + 1 \le (k+1)\ln(k+1) - k \ln k \le \ln(k+1) + 1\,.$$
Суммируя $k = 1, 2, \ldots, n$, получаем
$$\ln n! + n \le (n+1)\ln(n+1) \le \ln(n+1)! + n\,.$$
Отсюда, как легко видеть, следует, что
$$(n+1)^n e^{-n} \le n! \le (n+1)^{n+1} e^{-n}\,. \qquad (\text{П}.1)$$

Нам потребуется более точный результат, чем неравенство (П.1), а именно так называемая формула Стирлинга.

Напомним, что обозначение
$$f(n) = O(\varphi(n))\,,$$
где $\varphi(n)$ – положительная функция, означает, что существует постоянная $A > 0$, такая, что справедливо неравенство
$$|f(n)| < A \cdot \varphi(n)\,.$$
В частности, под $O(1)$ понимается ограниченная функция, например,
$$\frac{n}{n+1} = O(1)\,.$$

Дадим формулировку нужного результата.

Теорема П.1. Справедливо неравенство

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}(1+\rho(n)),$$

где

$$\rho(n) = O\left(\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right).$$

Для доказательства потребуется следующая лемма.

Лемма П.1. Справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\upsilon^2}\, d\upsilon = \sqrt{\pi}\ .$$

Пожалуй, проще всего вывести эту формулу следующим способом. Обозначим

$$I(R) = \int_{-R}^{R} e^{-\upsilon^2}\, d\upsilon\ .$$

Имеем очевидным образом,

$$I^2(R) = \int_{-R}^{R} e^{-\upsilon^2}\, d\upsilon \int_{-R}^{R} e^{-w^2}\, dw = \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} e^{-\upsilon^2-w^2}\, d\upsilon dw\,.$$

Таким образом, $I^2(R)$ есть интеграл, распространенный на квадрат со стороной $2R$ и центром в начале координат и со сторонами, параллельными осям координат υ и w, от функции $e^{-\upsilon^2-w^2}$. Обозначим через D' круг радиусом R, вписанный в этот квадрат, а через D – круг радиусом $R\sqrt{2}$, описанный вокруг этого квадрата (рис. П.1).

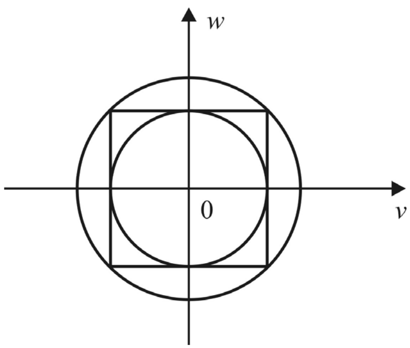

Рис. П.1

В силу положительности функции $e^{-\upsilon^2-w^2}$ имеем

$$\iint_{D'} e^{-\upsilon^2-w^2}\,d\upsilon dw \le I^2(R) \le \iint_{D} e^{-\upsilon^2-w^2}\,d\upsilon dw\,.$$

В интегралах, взятых по кругам D и D', перейдем к полярным координатам

$$r = r\cos\theta\,, \quad w = r\sin\theta\,, \quad dwd\upsilon = rdrd\theta\,,$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{R} e^{-r^2} rdrd\theta \le I^2(R) \le \int_0^{2\pi}\int_0^{R\sqrt{2}} e^{-r^2} rdrd\theta\,.$$

Это дает

$$\pi\left(1-e^{-R^2}\right) \le I^2(R) \le \left(1-e^{-2R^2}\right)\pi\,.$$

При $R\to\infty$ получаем

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\upsilon^2}\,d\upsilon\right)^2 = \pi\,.$$

Тем самым лемма доказана.

Докажем теперь формулу Стирлинга.

При $n \ge 1$ рассмотрим интеграл

$$I_n = \int_0^{\infty} t^n e^{-t}\,dt\,.$$

Ввиду быстрого убывания на бесконечности функции e^{-t} этот интеграл является сходящимся. Интегрируя по частям

$$u = t^n\,, \quad d\upsilon = e^{-t}dt\,,$$

имеем

$$I_n = -t^n e^{-t}\Big|_0^{\infty} + n\int_0^{\infty} t^{n-1}e^{-t}dt = n\int_0^{\infty} t^{n-1}e^{-t}dt = nI_{n-1}\,.$$

Повторяя эту выкладку, придем к равенству

$$I_n = n!\int_0^{\infty} e^{-t}dt = n!\,.$$

Доказательство формулы Стирлинга базируется на представлении

$$n! = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt \, . \qquad (\text{П.2})$$

Лаплас в своих исследованиях по теории вероятностей разработал некоторый общий метод исследования асимптотического поведения интегралов. Сущность этого метода состоит в том, что весь интеграл заменяется некоторой величиной, зависящей от поведения подынтегральной функции в точке максимума. Эту величину будем называть вкладом точки максимума в интеграл. Применение метода Лапласа распадается на две части: первая состоит в том, чтобы найти вклад точки максимума; вторая в том, чтобы показать, что весь интеграл асимптотически равен вкладу точки максимума.

Будем исследовать поведение интеграла (П.2) при $n \to \infty$ методом Лапласа.

Замена переменного $t = n\tau$ дает

$$n! = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n^{n+1} \int_0^\infty \tau^n e^{-n\tau} d\tau = n^{n+1} e^{-n} \int_0^\infty e^{-n(\tau - 1 - \ln \tau)} d\tau \, .$$

Рассмотрим функцию

$$y = e^{-n(\tau - 1 - \ln \tau)}$$

на отрезке оси τ $[0, \infty)$. При $\tau = 1$ эта функция имеет значение равное единице, а «по сторонам» от этой точки быстро убывает, стремясь к нулю (рис. П.2).

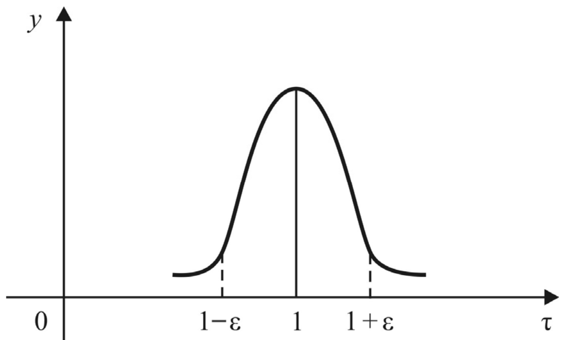

Рис. П.2

Можно ожидать, что значение интеграла при достаточно большом n, в основном, зависит от значений подынтегральной функции в окрестности точки $\tau = 1$. Соответственно, с этим выделим из интеграла (П.2) интеграл, взятый в пределах от $1-\varepsilon$ до $1+\varepsilon$, причем будем считать, что $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$.

Запишем:

$$n^{-n-1}e^n n! = \int\limits_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} e^{-n(\tau-1-\ln\tau)}d\tau + \int\limits_{0}^{1-\varepsilon} e^{-n(\tau-1-\ln\tau)}d\tau + \int\limits_{1+\varepsilon}^{\infty} e^{-n(\tau-1-\ln\tau)}d\tau =$$

$$= \int\limits_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} e^{-n(\tau-1-\ln\tau)}d\tau + I_n^{(1)} + I_n^{(2)}.$$

Прежде всего, оценим погрешность, которую вносят интегралы $I_n^{(1)}$ и $I_n^{(2)}$. При $0 < \tau < 1$ имеем

$$\tau - 1 - \ln\tau = \int\limits_{\tau}^{1}\left(\frac{1}{u} - 1\right)du \geq \int\limits_{\tau}^{1}(1-u)du = \frac{1}{2}(\tau-1)^2.$$

Поэтому

$$I_n^{(1)} \leq \int\limits_{0}^{1-\varepsilon} e^{-\frac{n}{2}(\tau-1)^2} d\tau \leq (1-\varepsilon)e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}} \leq e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}.$$

Далее, интеграл от $1+\varepsilon$ до ∞ разобьем на два: от $1+\varepsilon$ до 4 и от 4 до ∞:

$$I_n^{(2)} = \int\limits_{1+\varepsilon}^{4} e^{-n(\tau-1-\ln\tau)}d\tau + \int\limits_{4}^{\infty} e^{-n(\tau-1-\ln\tau)}d\tau = I_n'^{(2)} + I_n''^{(2)}.$$

Оценим интеграл $I_n'^{(2)}$. Имеем $1 \leq \tau \leq 4$

$$\tau - 1 - \ln\tau = \int\limits_{1}^{\tau}\left(1 - \frac{1}{u}\right)du \geq \frac{1}{4}\int\limits_{1}^{\tau}(u-1)du = \frac{1}{8}(\tau-1)^2.$$

Поэтому

$$I_n'^{(2)} \leq \int\limits_{1+\varepsilon}^{4} e^{-\frac{n}{8}(\tau-1)^2} d\tau \leq 3e^{-\frac{n}{8}\varepsilon^2}.$$

Теперь при $\tau \geq 4$ имеем

$$\tau - 1 - \ln\tau \geq \frac{3\tau}{4} - \ln\tau > \frac{\tau}{4},$$

поэтому

$$I_n''^{(2)} = \int_4^\infty e^{-n(\tau-1-\ln\tau)} d\tau < \int_4^\infty e^{-\frac{n\tau}{4}} d\tau < e^{-n} < e^{-\frac{n}{8}\varepsilon^2}.$$

Итак,

$$I_n^{(1)} + I_n'^{(2)} + I_n''^{(2)} \leq e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}} + 3e^{-\frac{n\varepsilon^2}{8}} + e^{-\frac{n}{8}\varepsilon^2} \leq 5e^{-\frac{n\varepsilon^2}{8}}.$$

Это дает

$$n^{-n-1}e^n n! = \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} e^{-n(\tau-1-\ln\tau)} d\tau + 5\theta e^{-\frac{n\varepsilon^2}{8}},$$

где $|\theta| \leq 1$. Если возьмем $\varepsilon = \frac{1}{n^{2/5}}$, то получим

$$n^{-n-1}e^n n! = \int_{1-1/n^{2/5}}^{1+1/n^{2/5}} e^{-n(\tau-1-\ln\tau)} d\tau + O\left(e^{-\frac{1}{8}n^{\frac{1}{5}}}\right).$$

Чтобы вычислить интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, разложим функцию $f(\tau) = \tau - 1 - \ln\tau$ в ряд Тейлора с двумя членами в окрестности точки $\tau = 1$. Имеем

$$f(\tau) = \frac{(\tau-1)^2}{2} + (\tau-1)^3 \psi(\tau),$$

причем $\psi(\tau)$ в интервале $1/2 \leq \tau \leq 3/2$ не превосходит по абсолютной величине некоторой постоянной M. Из этого можно сделать заключение, что при

$$1 - 1/n^{2/5} \leq \tau \leq 1 + 1/n^{2/5}$$

имеет место неравенство

$$e^{-\frac{n(\tau-1)^2}{2}} e^{-Mn^{-1/5}} \leq e^{-nf(\tau)} \leq e^{-\frac{n(\tau-1)^2}{2}} e^{Mn^{-\frac{1}{5}}}.$$

Но так как при $n \to \infty \quad n^{-\frac{1}{5}} \to 0$, а в окрестности точки $x = 0$ имеет место формула $e^x = 1 + O(x)$, то

$$e^{-nf(\tau)} = e^{-\frac{n(\tau-1)^2}{2}}\left(1 + O\left(n^{-1/5}\right)\right).$$

Отсюда получаем

$$\int_{1-1/n^{2/5}}^{1+1/n^{2/5}} e^{-nf(\tau)} d\tau = \left(1 + O\left(n^{-\frac{1}{5}}\right)\right) \int_{1-1/n^{2/5}}^{1+1/n^{2/5}} e^{-\frac{n(\tau-1)^2}{2}} d\tau =$$

$$= \int_{-n^{-2/5}}^{n^{-2/5}} e^{-\frac{nu^2}{2}} du \left(1 + O\left(n^{-\frac{1}{5}}\right)\right) = \sqrt{\frac{2}{n}} \int_{-1/n^{2/5}\cdot\sqrt{\frac{n}{2}}}^{1/n^{2/5}\cdot\sqrt{\frac{n}{2}}} e^{-\upsilon^2} d\upsilon \left(1 + O\left(n^{-\frac{1}{5}}\right)\right).$$

Очевидно, $\dfrac{1}{n^{2/5}}\sqrt{\dfrac{n}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} n^{1/10}$. Далее

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}n^{1/10}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}n^{1/10}} e^{-\upsilon^2} d\upsilon = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\upsilon^2} d\upsilon - \int_{|\upsilon| > \frac{1}{\sqrt{2}}n^{1/10}} e^{-\upsilon^2} d\upsilon.$$

Но при $|A| \ge 1$

$$\int_{|\upsilon| \ge A} e^{-\upsilon^2} d\upsilon \le \int_{|\upsilon| \ge A} \frac{|\upsilon|}{A} e^{-\upsilon^2} d\upsilon = \frac{2}{A}\int_A^{\infty} \upsilon e^{-\upsilon^2} d\upsilon = \frac{e^{-A^2}}{A} \le e^{-A^2}.$$

Поэтому при $n \ge 32$ (вспомним лемму) имеем

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}n^{1/10}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}n^{1/10}} e^{-\upsilon^2} d\upsilon = \sqrt{\pi} + \theta e^{-\frac{1}{2}n^{1/5}},$$

где $|\theta| \le 1$. Таким образом,

$$\int\limits_{1-n^{-2/5}}^{1+n^{-2/5}} e^{-nf(\tau)}d\tau = \sqrt{\frac{2}{n}}\left(\sqrt{\pi} + O\left(e^{-\frac{1}{2}n^{1/5}}\right)\right)\left(1 + O\left(n^{-\frac{1}{5}}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left(1 + O\left(n^{-\frac{1}{5}}\right)\right).$$

Итак,

$$n!n^{-n-1}e^{n} = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left(1 + O\left(\sqrt[5]{\frac{1}{n}}\right)\right).$$

Откуда

$$n! = \sqrt{2\pi n}n^{n}e^{-n}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right)\right),$$

что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория вероятностей и математическая статистика. Методические рекомендации (часть 1). В 4-х частях / Сост. *Е.И. Полякова, Л.П. Постникова, Е.В. Сумин*. М.: МИФИ, 2008.
2. Теория вероятностей и математическая статистика. Методические рекомендации (часть 2). В 4-х частях / Сост. *Е.И. Полякова, Л.П. Постникова, Е.В. Сумин*. М.: МИФИ, 2008.
3. Теория вероятностей и математическая статистика. Методические рекомендации (часть 3). В 4-х частях / Сост. *Е.И. Полякова, Л.П. Постникова, Е.В. Сумин*. М.: МИФИ, 2008.
4. Теория вероятностей и математическая статистика. Методические рекомендации (часть 4). В 4-х частях / Сост. *Е.И. Полякова, Л.П. Постникова, Е.В. Сумин*. М.: МИФИ, 2008.
5. *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей. М.: Агар, 2000.
6. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М.: Издательство ЛКИ, 2007.
7. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Юрайт-Издат, 2009.
8. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. М.: Издательский центр «Академия», 2003.
9. *Кремер Н.Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2009.
10. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х т. М.: Мир, 1984.
11. *Колмогоров А.Н., Журбенко И.Г., Прохоров А.В.* Введение в теорию вероятностей. М: Наука, 1982, библиотечка «Квант». Вып. 23.
12. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Людмила Петровна Постникова
Евгений Васильевич Сумин

Теория вероятностей и математическая статистика

Курс лекций

(часть 1)

Учебное пособие

Редактор М.В. Макарова

Подписано в печать 01.10.2010. Формат 60x84 1/16
Печ.л. 5,25. Уч.-изд.л. 5,25. Тираж 392 экз.
Изд. № 072-1 Заказ № 301

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
Типография НИЯУ МИФИ.
115409, Москва, Каширское ш., 31